Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Diplomová práce

Studium jednoduchých modelů spontánního vzniku struktur s aplikacemi v biologii a sociologii

Plzeň, 2005 Jan Janský

Předkládám tímto k posouzení diplomovou práci zpracovanou k završení studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni. Zároveň prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

Rád bych tuto příležitost využil k vyjádření poděkování všem, kteří mi byli nápomocni a ochotni poskytnout cenné rady.

Zvláště pak děkuji Doc. Dr. RNDr. Miroslavu Holečkovi, bez jehož podpory by tato interdisciplinární diplomová práce pravděpodobně nevznikla.

V Plzni dne 31. května 2005 . . . .

Obsah

1. Úvod

Jakožto pozorovatelé jsme neustálými svědky vzniků a zániků kvalit v přírodě. Může se jednat například o nukleaci zárodku tuhnutí v tavenině, oscilativní chemické reakce, antagonistické populační závislosti mezi dravcem a lovenou kořistí či pro mnohé úchvatný proces zrodu embrya a nového života ve zdánlivě homogenním chemickém a biologickém prostředí. Tyto jevy byly odpradávna vděčným objektem zkoumání mnoha vědců a filosofů. V této práci budou formulovány a analyzovány některé z přístupů k modelování systémů, ve kterých za specifických podmínek k těmto vznikům „struktur" dochází.

Nejprve krátce zmíníme fundamentální principy termodynamiky a význam produkce entropie, která hraje při vzniku struktur důležitou roli. Nárůst entropie je spojen s nevratností většiny přírodních procesů. K vysvětlení podstaty nevratnosti jako obecného fenoménu bylo do dnešního dne prezentováno mnoho teorií z nichž stručně nastíníme klasický Boltzmannův statistický přístup a moderní pohled vycházející z teorie stability, prvně formulovaný v druhé polovině dvacátého století kolektivem kolem Ilyi Prigogina. Tento moderní přístup je zatím patrně jediný, který vytváří most mezi klasickou dynamikou s přesně popsanými trajektoriemi a nevratností, která je popisována spíše statistickými metodami.

V další části pak budou prezentovány tři klasické modely vzniku struktur. Jedná se o Brusselator, první model oscilativní chemické reakce probíhající v nerovnovážných podmínkách, dalším je Roesslerův oscilátor (atraktor), známý svou citlivostí na nastavené počáteční podmínky, a konečně dva modely pro sledování populačních závislostí množství dravce a kořisti. Všechny tyto modely jsou popsány matematicky přesnými rovnicemi, jsou deterministické. Známe-li počáteční podmínky, budeme schopni zjistit stav systému v jakémkoli dalším časovém bodě. Okamžiky přechodů mezi kvalitativně odlišnými způsoby chování těchto modelů jsou lokalizovány na tzv. bifurkační body, ve kterých se při změně specifického parametru jedno z řešení stává nestabilním a zároveň jiné, odlišné, se stane stabilním. Samotný proces přechodu však v takto popsaných systémech není nikterak obsažen - vysvětluje se až dodatečně jako následek jakékoli elementární fluktuace, která způsobí odklon systému od nestabilní větve řešení k větvi stabilní. Tato fluktuace však v matematickém zápisu těchto modelů obsažena není, jedná se o modely čistě makroskopické. Vazby na mikrostrukturu popisovaných systémů jsou nepřímo zahrnuty pouze v parametrech, které ovlivňují chování systému jako celku.

Druhá polovina práce pak nastiňuje jednu z možností, jak formalizovat modelování biologických a sociálních systémů prostřednictvím konceptu uspokojování potřeb jednotlivých jedinců jakožto členů (elementárních prvků) biologických či sociálních společenství. Základní myšlenka tohoto přístupu spočívá v předpokladu, že jedinci se budou chovat a pohybovat ve smyslu uspokojení potřeby, která může být takového charakteru, že při vzájemné interakci těchto jedinců dojde ke vzniku struktury - například shluku (smečky či, stáda). Biologické a sociální systémy jsou však velmi složité, není tudíž možné dokonale obsáhnout všechny působící vlivy a popsat chování (pohyb) jedince zcela deterministicky. Množinu neznámých aspektů do modelu zahrneme v rámci náhodné veličiny, jejíž charakter se bude obecně měnit dle stavu uspokojení potřeb. Pomocí správně vyjádřené náhodné složky je možno, alespoň částečně, do modelu zahrnout jak jemnou fluktuaci kolem potřebami deterministicky určené trajektorie, tak i případy významných náhodných procesů, jejichž vliv budeme předpokládat v okamžicích uspokojení všech potřeb jedince.

Na uvedeném formálním základě pro modelování sociálních systémů pak vytvoříme jednoduchý diskrétní model společenství s jednou potřebou. Bude se jednat o skupinu identických jedinců, jejichž pohyb budeme sledovat v jednorozměrném prostoru. Jejich chování bude určeno potřebou tzv. „komunitního soužití", která nutí nespokojené jedince k pohybu směrem k většímu výskytu ostatních. Jakmile dojde k uspokojení této potřeby (v definovaném okolí shledá jedinec dostatečné množství ostatních), potřeba přestává působit a jednotlivec bude mít možnost učinit „svobodné rozhodnutí" a provést náhodnou veličinou modelovanou libovolnou akci (v našem případě jí bude přesun libovolným směrem). Následovat bude rozbor chování souboru jedinců tohoto společenství v závislosti na změně počátečních podmínek a parametrů modelu.

Tento přístup je charakteristický především tím, že vychází ze znalosti (či předpokladu) závislostí určujících chování elementárních prvků systému. Vznik makroskopické struktury bude až důsledkem interakce jednotlivých členů ve společenství. Jinou charakteristikou námi popsaného konceptu bude i možnost jeho zjednodušení pomocí redukce veličin až na úroveň klasických fyzikálních systémů.

2. Struktury a termodynamika

2.1. Termodynamika a nevratnost

V této části shrneme nejzákladnější termodynamické principy ohledně zachovávání energie, růstu entropie a podstaty nevratnosti. Pokud nebude výslovně uvedeno jinak, přebíráme převážně z práce [1].

2.1.1. Rovnováha

Rovnováhou se v termodynamice rozumí stav, ve kterém na makroskopické úrovni vymizí veškeré makroskopické *toky*[1] a současně je v celém systému stejná teplota. V těchto stavech nedochází k makroskopickým změnám uvnitř systému. Jak bude uvedeno dále, systém je ve stavu maximální hodnoty entropie a minimální hodnoty energie.

Rovnovážné systémy se někdy uvádějí jako *jednoduché systémy* [5]. Jednoduchý systém je takový, jehož stav X je určen n pracovními parametry a_i a energií E

$$X = X(E, a_1, \dots, a_n). \tag{2.1}$$

Dále pak *lokální rovnováha* je definována předpokladem, že každý infinitezimální element (část prostoru) v systému má vlastnosti *jednoduchého systému*.

2.1.2. Termodynamické věty

Mějme tři jednoduché systémy *A*, *B* a *C*.

$$\begin{aligned} A &= A(E_A, a_1, \dots, a_n), \\ B &= B(E_B, b_1, \dots, b_n), \\ C &= C(E_C, c_1, \dots, c_n). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Systém A je v tepelné rovnováze s B, $A \doteqdot B$, pokud složený systém definovaný jako (A, B) je také jednoduchý systém, čili $(A, B) = (E_A + E_B, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$.

Nultá věta termodynamiky[2] je pak vyjádřením transitivity stavu tepelné rovnováhy:

$$(A \doteqdot B) \wedge (B \doteqdot C) \Rightarrow (A \doteqdot C), \tag{2.3}$$

[1] Tok tepla (energie) a hmoty je nulový, poměr reaktantů vůči produktům u chemických reakcí je stálý atd.
[2] Někdy za větu není považována.

čili pokud je A v rovnováze s B a zároveň B je v rovnováze s C, pak je nutně i A v rovnováze s C.

První věta termodynamická byla jasně zformulována v druhé polovině devatenáctého století. Ve své podstatě nevyjadřuje nic jiného, než zákon zachování energie. Jedna ze slovních formulací tohoto zákona říká:

> *Jestliže dochází ke změně stavu systému, součet všech energetických změn (přenos tepla, vykonaná práce atd...) je nezávislý na způsobu této přeměny. Závisí pouze na počátečních a konečných stavech této transformace.*

Jinak řečeno, energetická bilance v systému je nezávislá na trajektorii jeho vývoje ve stavovém prostoru. To lze vyjádřit též jako

$$\oint dU = 0, \tag{2.4}$$

čili pokud se systém dostane do původního stavu, bude součet všech energetických přeměn roven nule. Planckova definice téhož zákona zní takto:

> *Není žádným způsobem možné, ať už pomocí mechanického, tepelného či chemického stroje, získat nevyčerpatelný zdroj motorické síly.*

Čili není možné sestrojit stroj, který by pracoval v cyklu a produkoval práci z ničeho. Tomuto stroji se jinak také říká perpetuum mobile prvního druhu.

Termodynamika se zabývá systémy, v nichž je možno množství energie procházející přes hranici systému rozdělit na dvě složky - na složku tepelnou δQ a na složku vykonané mechanické práce δW, pokud neuvažujeme výměnu částic s okolím[3]. První termodynamická věta pak říká, že energie procházející přes hranici systému právě kompenzuje změnu energie uvnitř systému, tj.

$$dU = \delta Q + \delta W. \tag{2.5}$$

V případě otevřeného systému, v němž dochází k toku částic, pak

$$dU = \delta Q + \delta W + dU_m, \tag{2.6}$$

kde dU_m představuje výměnu energie spojenou s přenosem hmoty.

Obecný zápis první termodynamické věty, který není omezen pouze na mechanicko - tepelné soustavy zní [6]:

> *Mějme systém S. Existuje extenzivní veličina (v klasickém pojetí energie), která je v každém okamžiku funkcí stavu systému, $E(X)$. Pro každý proces $X \rightarrow Y$ probíhající v systému S platí $E(Y) = E(X) + \triangle E$ a současně existuje jiný systém S' někde v okolí S takový, že (S, S') je izovolaný[4] systém*

[3]Zde δ značí diferenci dané veličiny, nikoli totální diferenciál.

[4]Izolovaným budeme rozumět systém, který žádným způsobem neinteraguje s okolím.

> *a pro S' platí $E(Y') = E(X') - \triangle E$, kde $X' \rightarrow Y'$ je změna stavů systému S'.*

Zkrátka pokud dojde v systému S (například část prostoru) ke změně této extenzivní veličiny, pak v někde jinde (v systému S') je tato změna plně kompenzována.

Důležité na první větě termodynamické je ti, že ji lze formulovat v rámci termodynamického popisu na makroskopické úrovni.

Zásadní přínos je obsažen v *druhé větě termodynamické*. Zavádí totiž do fyzikálního popisu prvek nevratnosti. Formulací je opět více [1], jako první uvedeme Kelvinovu verzi:

> *Není možný proces, jehož jediným výsledkem je to, že práce je vykonána na úkor tepla.*

Jiné znění může být následující:

> *Není možný stroj, který by veškeré dodané teplo přeměnil na mechanickou práci.*

Část tepla se *vždy* musí předat chladnější lázni, jinak řečeno, neexistuje tzv. perpetuum mobile druhého druhu. Clausiova formulace:

> *Teplo nemůže samovolně přecházet ze studenějšího tělesa na teplejší.*

V tzv. *rovnovážné termodynamice*, která popisuje proces jako posloupnost rovnovážných stavů, vede druhá termodynamická věta k existenci stavové funkce S, zvané *entropie*, pro níž platí

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \tag{2.7}$$

Tato veličina může v izolovaném systému s časem pouze narůstat nebo zůstat konstantní. Druhá termodynamická věta může pak znít i takto:

> *Součet entropických změn v systému a jeho okolí nemůže nikdy klesat.*

Vesmír jako celek se tak nikdy nemůže vrátit do svých předchozích stavů. Všechny uvedené formulace druhé termodynamické věty v sobě zahrnují nevratnost, nicméně zatím pouze na poli makroskopických veličin. Posun do mikroskopických přichází až s výše uvedeným pojmem entropie.

Nevratnost procesů můžeme v případech, kdy lze definovat teplotu a tok tepla, vyjádřit Clausiovou nerovností

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}. \tag{2.8}$$

V případě rovnosti se jedná o proces vratný. Klasická termodynamika předpokládá, že každá nevratná přeměna z rovnovážného stavu X do rovnovážného stavu Y, $X \rightarrow Y$, může být také dosažena pomocí vratného procesu, pro který platí

$$S_Y = S_X + \int_X^Y \frac{\delta Q}{T}. \tag{2.9}$$

Jinými slovy, každou nevratnou přeměnu, která se projeví změnou entropie, je možno realizovat nekonečně pomalým vratným procesem, při kterém je konečná změna entropie pouze výsledkem toku tepla. Čím více se blížíme k dokonale vratným přeměnám, jejich rychlost klesá k nule.

Pro zajímavost dodejme, že Rudolf Clausius nahradil nerovnost 2.8 rovností

$$N = S - S_0 - \int \frac{\delta Q}{T}, \tag{2.10}$$

kde S je entropie konečného stavu a S_0 entropie počátečního stavu. N pak vyjadřuje míru *nekompenzované přeměny*, množství entropie vyprodukované *uvnitř* systému. Porovnáním 2.8 a 2.10 pak dostaneme

$$N = S - S_0 - \int \frac{\delta Q}{T} > 0 \tag{2.11}$$

a tím také Clausiovu formulaci druhé termodynamické věty:

> *Nekompenzované přeměny mohou být pouze kladné.*

Ještě uveďme, že třetí termodynamická věta vyjadřuje nedosažitelnost teploty absolutní nuly.

2.1.3. Entropie a její produkce

Změnu entropie systému můžeme rozdělit do dvou složek

$$dS = d_iS + d_eS, \tag{2.12}$$

kde d_eS vyjadřuje změnu entropie v důsledku výměny tepla a hmoty s okolím a d_iS vyjadřuje míru nekompenzované přeměny uvnitř uvažovaného systému. Za předpokladu lokální rovnováhy lze nevratnost v procesech kvantifikovat pomocí *termodynamických sil* F a *termodynamických toků* J, jako nekompenzovanou přeměnu obsaženou ve složce d_iS.

$$d_iS = FdX, \qquad dX = Jdt, \qquad J \equiv \frac{dX}{dt}, \tag{2.13}$$

Celková změna entropie v objemu V je pak vyjádřitelná ve formě sumy součinů jednotlivých sil F_k a změn dX_k jako

$$d_iS = \int_V \sum_k F_k dX_k dV \geq 0 \tag{2.14}$$

nebo přímo pomocí produkce entropie jako

$$P = \frac{dS_i}{dt} = \int_V \sum_k F_k \frac{dX_k}{dt} dV = \int_V \sum_k F_k J_k dV \geq 0, \tag{2.15}$$

kde $J_k = \frac{dX_k}{dt}$ představuje termodynamický tok.

Celkovou produkci entropie P v objemu V lze vyjádřit pomocí lokální hustoty produkce entropie σ,

$$P = \int_V \sigma dV. \tag{2.16}$$

Pro ilustraci ukážeme, jak vypadá výraz pro hustotu produkce entropie v systému s tepelnými, elektrickými i hmotnými[5] toky [1, 6]:

$$\sigma = \vec{q} \cdot \nabla \frac{1}{T} - \frac{1}{T}\mathbf{P} : \nabla \vec{v} - \sum_k \vec{J}_k \cdot \nabla \frac{\mu_k}{T} + \frac{\rho}{T} \sum_l \dot{\xi}_l A_l + \frac{1}{T} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{i}. \tag{2.17}$$

Zde $\vec{q}$ představuje tok tepla, $\mathbf{P}$ je Cauchyův tenzor napjatosti, $\vec{v}$ představuje rychlost, J_k je tok částic, μ_k chemický potenciál, ρ hustota, ξ rozsah chemické reakce, A afinita chemické reakce, $\vec{\varepsilon}$ elektromotorické napětí a $\vec{i}$ elektrický proud (hustota toku).

Procesy, které jsou popisovány vztahem 2.17 v přírodě probíhají pouze jedním směrem, což od osmnáctého století vedlo k mnoha různým pokusům tuto nevratnost vysvětlit. Fourierův zákon vedení tepla byl jeden z prvních, který do fyziky, do té doby převážně ovlivněné Newtonovou dynamikou, začlenil tzv. *šipku času*[6]. Při přechodu od mikrosvěta do makrosvěta se najednou v systémech začíná projevovat něco, co má za důsledek pouze jednosměrné makroskopické toky termodynamických veličin. Není možné získat předchozí makroskopická uspořádání pouze otočením mechanických rychlostí pohybu na úrovni mikroskopické. Izolované systémy mají tendenci vždy dospět do konečného rovnovážného stavu - stavu maximální možné entropie. Maximum entropie pak představuje jakýsi *„atraktor" vývoje izolovaného systému.*

2.1.4. Různé interpretace nevratnosti

Nejznámější mikroskopická interpretace nevratnosti byla formulována Ludwigem Boltzmannem. Ten se jako první pokusil o spojení mikrosvěta a makrosvěta s využitím teorie pravděpodobnosti.

Jeho pojetí entropie se zakládá na možnosti popsat vývoj systému na základě *molekulárního chaosu*, který nutně vede systém do stavu s nejvyšší pravděpodobností jeho uspořádání. Počáteční nesouměrnosti časem vymizí a zbude nejpravděpodobnější stav, rovnováha. Tento přístup lze shrnout slavnou rovnicí

$$S = k \ln P, \tag{2.18}$$

kde k je Boltzmannova konstanta a P je počet mikrostavů, kterými je možno realizovat daný makrostav[7]. Stavu s nejvyšší entropií tedy odpovídá stav s největším počtem ekvivalentních konfigurací, veškeré další výchylky od tohoto maxima budou jen malé a

[5] Tok částic a chemické reakce.

[6] Autorem tohoto vžitého termínu byl Sir Arthur Eddington.

[7] Logaritmus se ve vztahu objevuje z toho důvodu, že entropie musí být aditivní veličinou, $S_{1+2} = S_1 + S_2$, kdežto počet uspořádání oddělených systémů se násobí, $P_{1+2} = P_1 P_2$.

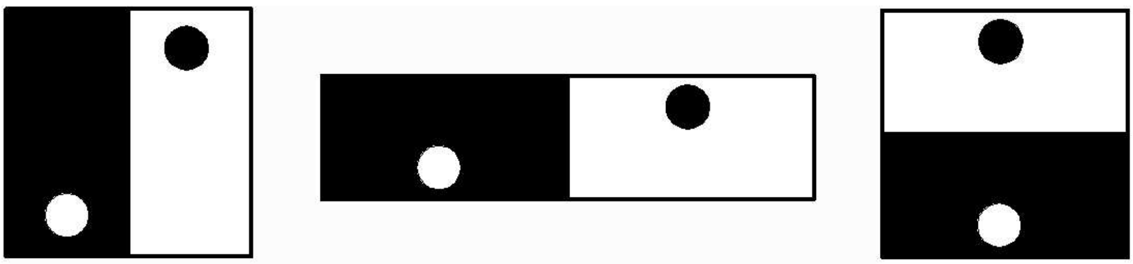
krátkodobé - systém bude jemně fluktuovat kolem atraktoru určeného maximem entropie vyjádřené v 2.18.

Tento statistický přístup má i svá úskalí. Lochschmidt například ukázal, že Boltzmannův srážkový model při otočení rychlostí již neplatí, což se podařilo ověřit simulací i v laboratoři. Pokud při otočení rychlostí jednotlivých částic[8] zůstanou zachovány korelace mezi těmito částicemi[9], pak se prostorové rozložení dostane do svého původního stavu. Jinými slovy, růst entropie jako tendence systému dospět do stavu s vyšší mírou pravděpodobnosti uspořádání má nutnou podmínku vzájemné nezávislosti (nulové korelace) jednotlivých částic. Někteří autoři zase Boltzmannovu přístupu vytýkali, že pravděpodobnost sama již předpokládá směr času a proto ji nelze použít k odvození šipky času [2].

Dlouho se zdálo, že nebude možné spojit klasickou dynamiku s rozumnou teorií nevratnosti. V šedesátých a sedmdesátých letech dvacátého století byl formulován nový možný náhled na problém nevratnosti, který podle všeho s klasickou dynamikou slučitelný je. Tento přístup úzce souvisí s teorií stability a bifurkací. Přesto, že se jedná zatím spíše o teoretický koncept, uvedeme alespoň dva příklady a základní ideu.

První příklad se bude týkat tzv. Lorentzova modelu koulí[10]. Jedná se o kouli, která se pohybuje po rovné ploše a odráží se pružně od ostatních upevněných koulí. Její pohyb je v bodovém popisu deterministický. Avšak při zavedení sebemenší elementární počáteční odchylky se při každém odrazu chyba zvětšuje a po několika rázech se výsledná poloha koule může od původní zcela lišit. V důsledku pak v libovoně malém okolí počátečních stavů vždy existuje nekonečně mnoho zcela se lišících trajektorií. Do původního stavu se systém již nikdy nevrátí (ani po libovoně dlouhé době ideálně pružných odrazů). Jedná se o typickou ukázku nestabilního dynamického systému.

V druhém příkladu, který je zároveň základní ideou konceptu, je vysvětlení nevratnosti postavené na nalezení deterministické transformace, ve které se při aplikaci na fyzikální systém objeví šipka času. Jednou z transformací, která tuto vlastnost splňuje je tzv. *Pekařská transformace*. Její princip je shrnut na obrázcích 2.1 a 2.2.



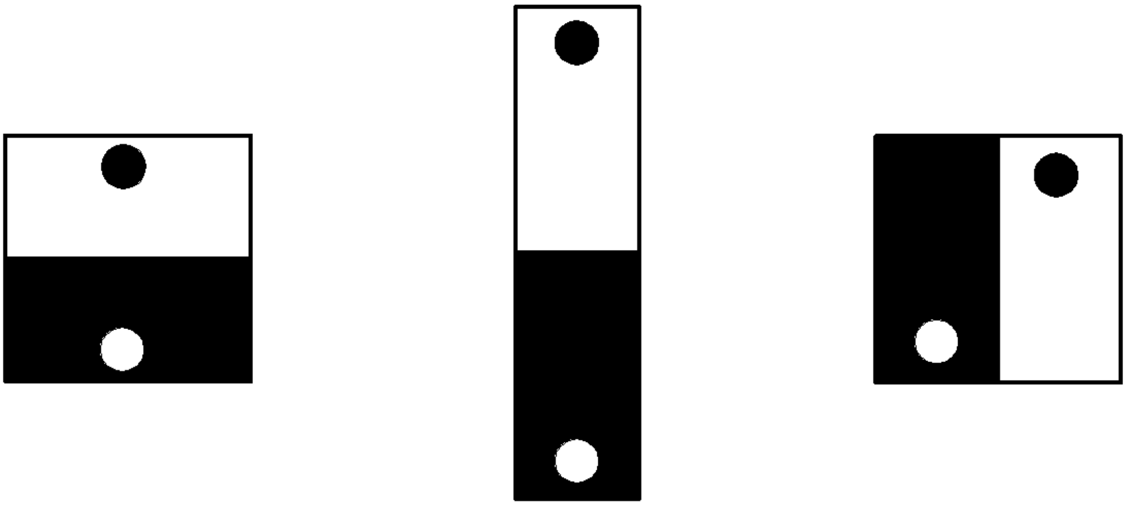
Obrázek 2.1.: Pekařská transformace. Průběh transformace ukazuje přehod od „svislého" rozdělení k rozdělení „vodorovnému". Původní „prostor" je zdeformován, rozdělen a výsledné části přeloženy na sebe.

Jeden prostorový rozměr se zmenší na polovinu a druhý se zvětší na dvojnásobek.

[8] Boltzmannův přístup byl čistě mechanický.

[9] V systému je zachována historie jeho předešlého vývoje.

[10] Podle holandského fyzika Hendrika Antoona Lorentze.



Obrázek 2.2.: Inverzní pekařská transformace. Stejné jako na obrázku 2.1 s tím rozdílem, že přecházíme opačným postupem od „vodorovného” rozdělení k rozdělení „svislému”.

Vzniklý útvar se rozdělí na dva kusy, které se přesunou na sebe tak, že dostaneme opět obrazec původních rozměrů s jiným vnitřním uspořádáním.

Matematická formulace Pekařské transformace je

$$0 < x < 1 \qquad 0 < y < 1$$

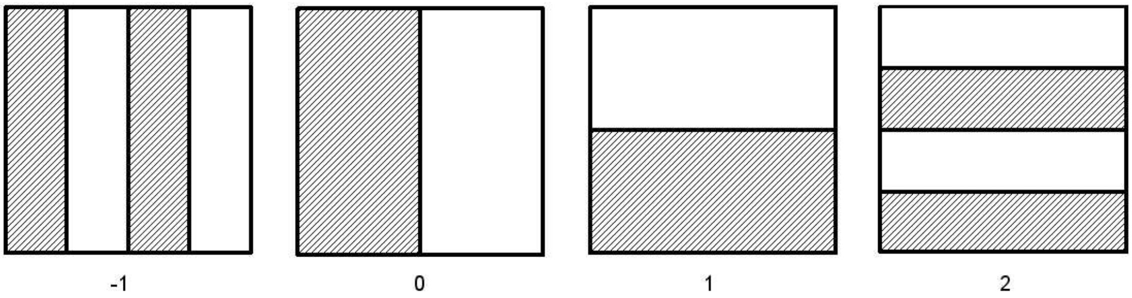
$$\begin{array}{rcl} x' &=& 2x \\ y' &=& y/2 \end{array} \quad \forall x < 1/2 \qquad \begin{array}{rcl} x' &=& 2x - 1 \\ y' &=& (y+1)/2 \end{array} \quad \forall x \geq 1/2. \tag{2.19}$$

Inverzní transformaci lze zapsat jako

$$0 < x < 1 \qquad 0 < y < 1$$

$$\begin{array}{rcl} x' &=& x/2 \\ y' &=& 2y \end{array} \quad \forall y < 1/2 \qquad \begin{array}{rcl} x' &=& (x+1)/2 \\ y' &=& 2y - 1 \end{array} \quad \forall y \geq 1/2. \tag{2.20}$$

Opakováním transformací popsaných rovnicemi 2.19 se uspořádání systému mění, jak je vidět na obrázku 2.3. Stav 0 odpovídá „přítomnosti” a je charakterizován tzv. „vytvořující funkcí” definující počáteční rozložení možných stavů v systému. S posunem do budoucnosti transformací vytváříme řadu „vodorovných” oblastí možných stavů, v opačném směru, do minulosti, pak zase řadu oblastí „svislých”. V obou případech po čase nastane situace kdy se počáteční jednoznačně vyhraněný stav zcela rozptýlí rovnoměrně do celého prostoru. Jinými slovy, v každém libovolně malém prostoru stavů jsme schopni po určitém čase nalézt mnoho těch, do kterých se systém může dostat z počátečního rozložení. Toto se děje jak ve směru do budoucnosti, tak do minulosti, pokaždé z vytvořující funkce dospějeme do „rozptýlenějšího” stavu. Míru této rozptýlenosti lze nazvat „vnitřním stářím” systému, které jednoznačně určuje časobou vzdálenost od původní vytvořující funkce.



Obrázek 2.3.: Přechod od minulosti do budoucnosti. Stav 0 odpovídá současnosti a specifikuje „vytvořující" funkci stavů systému. S postupem do budoucnosti i minulosti dochází k rovnoměrnému rozptýlení možných stavů systému do celého prostoru.

Vztah k nevratnosti v přírodních procesech je v tomto pojetí přiblížen následujícím postupem. Máme daný systém podléhající pekařské transformaci. Na počátku je na nás, abychom určili počáteční stav objektů v tomto systému. Budeme uvažovat dvě varianty, jak je ukázáno na obrázku 2.4. V prvním případě jsme zvolili takové počáteční podmínky, že se možné stavy systému vymezují do stále menšího a menšího prostoru, dochází ke zkracování „vlákna", až v nekonečném čase dospějeme do bodu - jeden konkrétní možný stav[11]. V druhém případě jsme zvolili podmínky takové, že s každým časovým krokem dochází k prodlužování „vlákna", možné stavy sledovaného systému se postupně rozptylují, až v nekonečném čase je jich v každé infinitezimální oblasti stavového prostoru nekonečně mnoho.

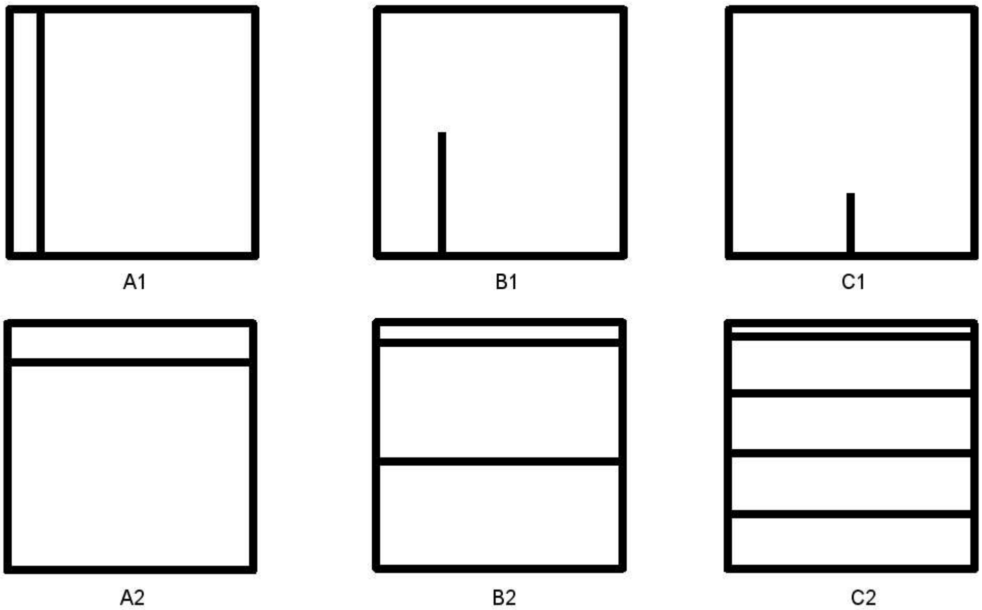
Případ zkracujícího se vlákna je fyzikálně přirovnáván například k situaci, kdy z na první pohled „chaotického" pohybu jednotlivými srážkami dochází postupně k unifikaci jednotlivých rychlostí, až jsou nakonec všechny vektory rychlosti rovnoběžné. Případ prodlužujícího se vlákna je pak přesným opakem, kdy na počátku budeme mít vektory rychlostí rovnoběžné a opakovanými transformacemi se dopracujeme k jejich rovnoměrnému rozložení, k chaosu [2].

K tomu aby bylo možno tímto modelem zdůvodnit šipku času, je nutné ukázat, že v přírodě dochází pouze k realizaci jednoho ze dvou typů těchto „vláken". Základní myšlenka ospravedlňující neexistenci zkracujících se vláken spočívá v tom, že žádný experimentátor není schopen systém ovládat natolik přesně, aby po daném počtu transformací získal „rovnoběžné rychlosti". Nutnou podmínkou úspěchu je totiž znalost nekonečně velkého množství informace ohledně přesnosti počátečních podmínek. Již od počátku pohybu musí být veškeré pohyby částic navzájem korelované. Vratnost je v tomto pohledu vyloučena kvůli principiální nemožnosti výběru počátečních podmínek umožňujících „zpětný" chod systému[12] [2].

Na závěr ještě připomeňme, že vztah zde nastíněného modelu k problému fyzikální

[11] Například koule v Lorentzově modelu by pak po určité sérii odrazů vždy spěla k jednomu konkrétnímu bodu.

[12] A to na úrovni klasické dynamiky, kdy nejsou brány v úvahu procesy probíhající v kvantovém měřítku.



Obrázek 2.4.: Zkracující se a prodlužující se vlákna. V závislosti na volbě počátečních podmínek dochází buď ke konvergenci k jedinému bodu ve stavovém prostoru (A1,B1,C1) či k rozptýlení možných stavů po celém prostoru (A2,B2,C2).

nevratnosti je zatím ve stavu ověřování a tudíž má stále spíše hypotetický charakter.

2.2. Produkce entropie jako zdroj řádu

Nyní se pokusíme nastínit způsoby analýzy stability stacionárních stavů systémů a rovněž uvedeme vliv fluktuací na vznik nových struktur.

2.2.1. Stacionární stavy nerovnovážných systémů

Obecně je stav systému, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$, vyjádřen jako *r*-dimenzionální vektor. Časový vývoj takového systému lze vyjádřit jako

$$\frac{dX_k}{dt} = Z_k(X_1, X_2, \ldots, X_r; \lambda_j), \tag{2.21}$$

kde λ_j jsou řídící parametry, které mohou, ale nemusí, být závislé na čase. Stacionární stav $X_s = (X_{s1}, X_{s2}, \ldots, X_{sr})$ systému X je dán řešením soustavy rovnic

$$\frac{dX_k}{dt} = Z_k(X_{s1}, X_{s2}, \ldots, X_{sr}; \lambda_j) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{2.22}$$

Pro systémy, které jsou blízko rovnováze lze linearizovat vztah mezi termodynamickou silou a termodynamickým tokem.

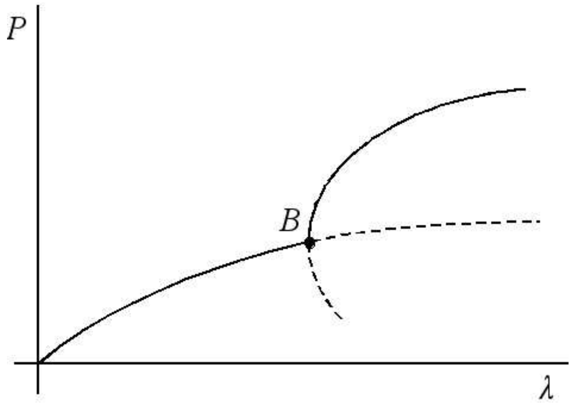
$$J_k(F_1 \dots F_n) = \sum_i L_{ki} F_i. \tag{2.23}$$

Tzv. *Onsagerovy vztahy* [1] pak dále ještě říkají, že

$$L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}. \tag{2.24}$$

Ve stavech blízko rovnováhy lze tedy závislost mezi toky a silami vyjádřit obecně podle 2.23 a produkci entropie pak zjistit dosazením do 2.15, případně 2.17.

Lineární aproximaci konstitutivních vztahů však nelze použít vždy. V systémech, které jsou daleko od rovnováhy je tento popis již nedostačující, konstitutivní vztahy je nutno přeformulovat do nelineární podoby. Může se pak stát, že pro určité hodnoty parametru systému se stacionární stavy, které se realizují v blízkosti rovnováhy, stanou nestabilními a objeví se kvalitativně jiné chování celku. Na obrázku 2.5 vidíme možný průběh produkce entropie P v závislosti na nějakém parametru λ. V bodě B se stávající řešení stává nestabilním a systém přechází do nového stavu.



Obrázek 2.5.: Nárůst produkce entropie a bifurkace.

V lineární aproximaci jsou stacionárními stavy ty, v nichž celková produkce entropie $P = \int_V \sigma dV$ dosáhne minima. Tento aspekt také zaručuje stabilitu stacionárního stavu. V nelineární aproximaci tento princip již obecně neplatí, stacionární stavy se mohou stát nestabilními.

Celkovou změnu produkce entropie, viz 2.15, lze vyjádřit jako

$$\frac{dP}{dt} = \int_V \left(\frac{d\sigma}{dt}\right) dV = \int_V \left(\sum_k \frac{dF_k}{dt} J_k\right) dV + \int_V \left(\sum_k F_k \frac{dJ_k}{dt}\right) dV \equiv \frac{d_F P}{dt} + \frac{d_J P}{dt}. \tag{2.25}$$

Z toho vyplývají dvě podmínky:

1. V lineárním režimu, kdy je systém blízko rovnováhy, platí[13]
$$\frac{d_F P}{dt} = \frac{d_J P}{dt}. \tag{2.26}$$

2. Pro stacionární okrajové podmínky, i mimo lineární oblast, platí [1]
$$\frac{d_F P}{dt} \leq 0, \tag{2.27}$$
$\frac{d_F P}{dt} = 0$ pak ve stacionárním stavu.

Pro stavy v blízkosti rovnováhy tedy platí $P \geq 0$ a pokud platí 2.26, tak z 2.27 plyne, že pro stacionární okrajové podmínky platí $\frac{dP}{dt} \leq 0$. S přibližováním se k rovnováze pak $P \to 0$. Platnost podmínky $\frac{dP}{dt} \leq 0$ nabývá důležitosti při vzdalování okrajových podmínek od rovnováhy. Jakmile se okrajové podmínky zažnou vzdalovat od rovnovážných, mohou v systému vznikat nové, nečekané stavy - například spontánní oscilace.

2.2.2. Stabilita

Stabilita stacionárních stavů bývá obvykle analyzována pomocí Ljapunovovy teorie stability, kterou zde krátce zmíníme.

Systém je ljapunovsky stabilní, pokud platí
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k(\varepsilon) > 0 \quad \forall t \quad \forall \|\delta X\| < k(\varepsilon): \quad |\varphi(X_s + \delta X, t) - \varphi(X_s, t)| < \varepsilon. \tag{2.28}$$

Slovy řečeno, pro libovolné ε lze najít takové okolí $k(\varepsilon)$ stavu X_s, že jakákoli odchylka δX od stavu X_s, která je v rámci okolí $k(\varepsilon)$, nepřivede v žádném čase t systém φ od jeho původního stavu dále než o ε. Pokud se po malé výchylce systém vrátí do stabilního stavu, což lze zapsat jako
$$\lim_{t \to \infty} |\varphi(X_s + \delta X, t) - \varphi(X_s, t)| = 0, \tag{2.29}$$
pak je systém navíc asymptoticky stabilní. Ljapunovova funkce je každá reálná funkce (případně funkcionál), která splňuje podmínky
$$L(\delta X) > 0, \qquad \frac{dL(\delta X)}{dt} < 0. \tag{2.30}$$

[13] Vycházíme-li z Onsagerových vztahů a předpokládáme-li, že $\frac{dL_{ki}}{dt} \approx 0$, pak
$$\sum_k dF_k J_k = \sum_{ki} dF_k L_{ki} F_i = \sum_{ki} (dF_k L_{ki}) F_i = \sum_i dJ_i F_i$$
po dosazení do 2.25 dostaneme
$$\frac{d_F S}{dt} = \int_V \left(\sum_k \frac{dF_k}{dt} J_k \right) dV = \int_V \left(\sum_k F_k \frac{dJ_k}{dt} \right) dV = \frac{d_J P}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dP}{dt}$$

Podmínkám 2.30 se říká Ljapunovovy podmínky stability. Funkcí $L(\delta X)$ může být v našem případě například výraz v absolutní hodnotě ve vztahu 2.29:

$$L(\delta X) = |\varphi(X_s + \delta X, t) - \varphi(X_s, t)|\,. \tag{2.31}$$

V rovnovážné termodynamice je entropie konkávní funkcí. Za předpokladu lokální rovnováhy je tedy záporně vzatá druhá variace entropie funkcí kladnou, tj

$$-\frac{1}{2}\delta^2 S > 0. \tag{2.32}$$

Pro splnění podmínek 2.30 je ještě nutné ukázat, že platí $-\frac{d}{dt}\delta^2 S < 0$. Lze odvodit[14], že

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta^2 S}{2} = \sum_k \delta F_k \delta J_k. \tag{2.33}$$

Z 2.32 a 2.33, kde $L = -\delta^2 S$, dostáváme podmínku stability nerovnovážného stacionárního stavu jako

$$\sum_k \delta F_k \delta J_k > 0, \tag{2.34}$$

kde δF_k, δJ_k jsou fluktuace makroskopických sil a toků[15]. Podmínka 2.34 je nutnou podmínkou stability a nikoli podmínkou postačující. Její porušení pouze indikuje, že by daný systém *mohl* být nestabilní.

V blízkosti rovnováhy dále ještě platí, že $\sum_k \delta F_k \delta J_k = \sum_k F_k J_k = P$, což je nezáporná veličina.

2.2.3. Vliv fluktuací

Fluktuace, čili malé výchylky spontánně se objevující v termodynamických systémech, nabývají významu v okamžiku, kdy se systém dostane do stavu, ve kterém přestává platit podmínka stability 2.34. Za touto hranicí pak libovolně malá fluktuace může narůstat a dovést systém do jiného stabilního stavu, který může a nemusí být stacionární.

Význam fluktuací však může sahat i dále. Některá pozorování a měření ukazují, že za nerovnovážných podmínek se mohou v systému objevit korelace velkého dosahu. Například jednotlivé molekuly se na dálku[16] začínají „uspořádávat" - v systému se objeví statisticky významné korelace velkého dosahu. Tyto korelace mezi fluktuacemi se začínají objevovat v okamžiku přechodu od rovnováhy k nerovnováze. Se zvyšující se nerovnováhou rostou i amplitudy těchto korelací a v blízkosti bifurkačních bodů mohou být až nekonečně veliké. Za nerovnovážných podmínek se objevuje jakási tendence k uspořádávání, ke vzniku struktur.

[14] Například [1].

[15] Tyto fluktuace nejsou nezávislé, protože musí přinejmenším splňovat bilanční vztahy.

[16] Podstatně větší vzdálenost, než je účinný dosah silového působení molekuly či částice.

2.2.4. Disipativní struktury

Spontánní uspořádávání, které se objevuje v systému za silně nerovnovážných podmínek s sebou nese i vysokou produkci entropie. Říkáme, že v systému dochází ke zvýšené disipaci energie, aby zůstal stabilní. Odtud se vzniklé struktury nazývají *disipativními*.

Způsoby modelování vzniku a chování těchto struktur jsou převážně dva:

1. *Synergetický přístup*: Vytvoří se matematický model, většinou soustava diferenciálních rovnic, které mají za cíl co nejpřesněji opisovat *makroskopické* chování sledovaného systému. Analýzou stability těchto modelů v rámci jejich parametrů lze nalézt podmínky vedoucí k bifurkacím a vzniku nových struktur - viz kapitola 3. Tyto modely jsou *makroskopické* a nemají přímý vztah k elementárnímu složení.

2. *Mikroskopické modely*: Na základě znalosti (případně předpokladu) chování elementárního objektu (částice, atom...) je utvořen model, ve kterém se snažíme o co nejpřesnější formulaci závislostí na nejsubtilnější možné úrovni a analyzujeme statistické, makroskopické chování souboru těchto elementárních objektů - viz kapitola 4. Tyto modely již mají vazby na mikrostrukturu.

Do oblasti modelování disipativních struktur prvního druhu spadají například diferenciální modely chemických reakcí, z nichž některé[17] vykazují oscilativní chování (Brusselator), prostorové struktury vznikající vlivem působení difuse (například tzv. Turingovy struktury). Do této skupiny také spadají klasické antagonistické modely pro populační závislosti dravce na kořisti, ovlivňování hladiny cukru v krvi na vylučování inzulinu a glukagonu či modely rozdělení příslušnosti občanů k jednotlivým politickým stranám. Z druhé skupiny lze jmenovat například numerické modely dopravních zácp [4] či populační modely výskytu jedinců v prostoru.

[17] Nelineární rovnice s autokatalytickými členy.

3. Synergetika

3.1. Synergetika jako vědní obor

Slovo *synergetika* pochází z řeckého *synergeia*, což značí kooperativní činnost. Tento termín kdysi použil anglický fyziolog Sharington k označení množiny jevů[1] u nichž není možné výsledné chování systému získat prostým součtem jeho jednotlivých částí. Později tento termín zcela stejným způsobem použil profesor Stuttgartské univerzity H. Haken k označení stejné skupiny jevů, tentokrát však na množině jevů fyzikálních. Hakena zaujalo, že vnik nových kvalit v různých systémech, například zmagnetování látek, vznik supravodivosti, vznik koherentního záření v laseru atd., probíhá stejným či podobným způsobem, který lze vyjádřit pomocí jednotného formalismu.

Do synergetiky je zahrnováno vše, co nějak souvisí se vznikem nových kvalit. Je do ní možno zařadit například Prigoginovu nerovnovážnou termodynamiku, teorii rovnovážných i nerovnovážných fázových přechodů, Thomovu teorii katastrof, matematickou teorii bifurkací a mnohé poznatky týkající se vzniku struktur v chemii, biologii, ekologii, ekonomii a sociologii.

Největší rozšíření synergetiky se uvádí na poli fyziky, kde se jedná převážně o teorie vniku nových struktur v systémech s nelineární dynamikou. Tyto struktury vznikají za poměrně přesně specifikovaných podmínek a jsou v nestabilních stavech vyvolané fluktuacemi (malými poruchami). Vznik nové kvality má většinou povahu rychlé kvalitativní změny. Těchto nových kvalit se zpravidla uvádí šest [3]:

1. Vznik časových struktur - původně stacionární systém začne vykazovat oscilace v čase

2. Vznik prostorových struktur - původně homogenní systém se začne prostorově uspořádávat

3. Vznik časových struktur impulzního charakteru - laser pracující v konstantním režimu se při určitém kritickém výkonu mění na pulzně pracující zdroj

4. Vznik solitonů - vlnové balíky, které se při šíření nerozplývají, ani se vzájemně neovlivňují

5. Vznik tzv. spirál a hypercyklů v biologických systémech - specifické jevy, pozorované v biologických systémech, jedná se například o selekci, vznik druhů, tvarů atd.

[1] Tzv. kooperativních jevů.

6. Vznik tzv. deterministického chaosu - původně deterministický systém, například kapalina s laminárním prouděním, se najednou změní na „chaotický” systém, například kapalina s turbulentním prouděním

Synergetika například ukázala, že za udržovaných nerovnovážných podmínek (konstantní přísun energie) se může systém uchovávat ve stavu s vyšší mírou uspořádanosti, tedy s nižší mírou vnitřní entropie. Tento poznatek umožnil původně fyzikální model rozšířit i na množinu systémů nefyzikálních - biologických, sociálních atd. Byl překonán dřívější rozpor mezi termodynamikou, která postulovala rozpad nízkoentropických uspořádaných struktur v chaos, a biologií, která naopak postulovala vývoj od systémů s nižší mírou uspořádanosti k systémům s vyšší mírou uspořádanosti.

V tomto ohledu je synergetika dnes velmi moderním oborem s poměrně jistou perspektivou.

3.2. Ukázky nelineárních evolučních modelů

V této části ukážeme některé matematické modely na kterých je možno prezentovat vznik jednoduchých struktur. Bude se jednat o systém oscilativní chemické reakce - Brusselator, Roesslerův oscilátor, a dva modely popisující populační závislosti dravce a kořisti.

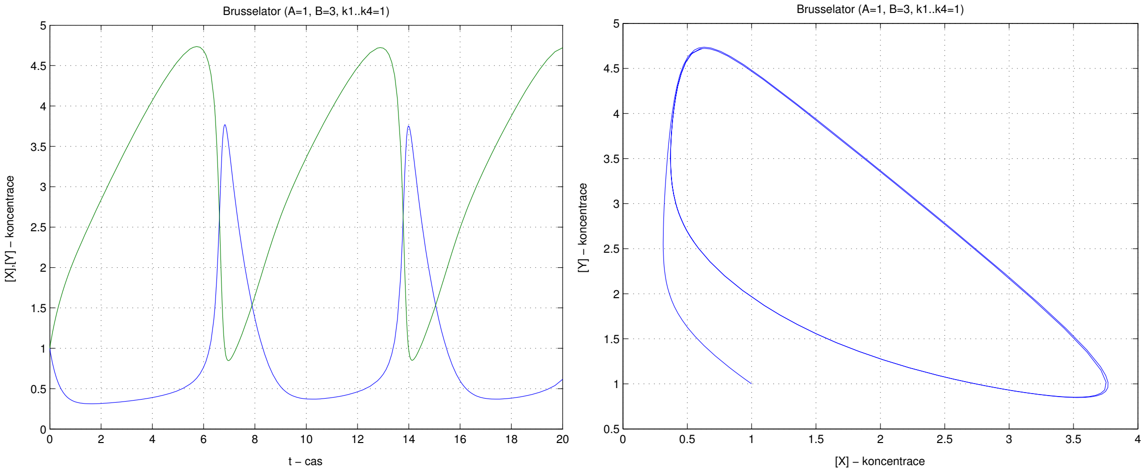
3.2.1. Brusselator

Brusselator [1] je jednoduchý model chemické reakce, na kterém je možné zkoumat vznik časových oscilací koncentrací jednotlivých reagujících složek. Reakční schéma je následující:

$$
\begin{aligned}
A &\xrightarrow{k_1} X, \\
B + X &\xrightarrow{k_2} Y + D, \\
2X + Y &\xrightarrow{k_3} 3X, \\
X &\xrightarrow{k_4} E.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Z reaktantů *A* a *B* vznikají produkty *D* a *E*. Pro model budeme koncentrace *A* a *B* udržovat na nějaké zvolené (nerovnovážné) hodnotě. Produkty *D* a *E* budou z reakce odebrány ihned po jejich vzniku. Zpětné reakční přeměny nebudeme uvažovat. Formálně lze koncentrace x, y (dále budeme používat obvyklé značení [X] a [Y]) látek *X* a *Y*, vyjádřit následující soustavou nelineárních diferenciálních rovnic:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= k_1A - k_2Bx + k_3x^2y - k_4x, \\
\frac{dy}{dt} &= k_2Bx - k_3x^2y.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$



(a) (b)

Obrázek 3.1.: Brusselator s typickými oscilacemi v čase. Bez ohledu na počáteční podmínky je zejména při zobrazení ve fázovém prostoru (b) vidět, jak se oscilace stabilizují.

Stacionárním řešením soustavy jsou hodnoty

$$x_s = \frac{k_1}{k_4}A, \qquad y_s = \frac{k_1 k_4}{k_1 k_3}\frac{B}{A}. \tag{3.3}$$

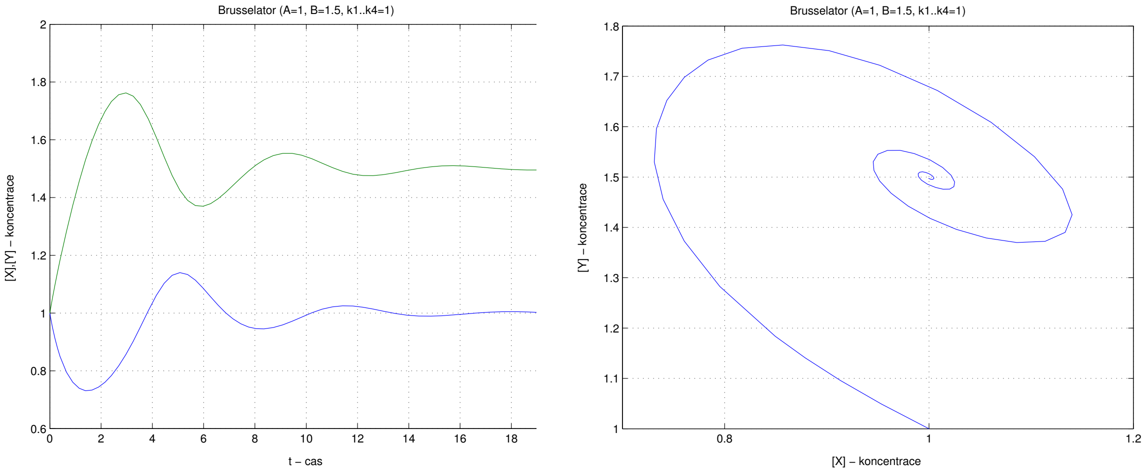
Analýzou stability tohoto řešení - porovnáním vlastních čísel Jacobiho matice soustavy rovnic 3.2 - zjistíme že stacionární stavy přestávají být stabilní pro

$$B > \frac{k_4}{k_2} + \frac{k_1^2 k_3}{k_2 k_4^2}A^2. \tag{3.4}$$

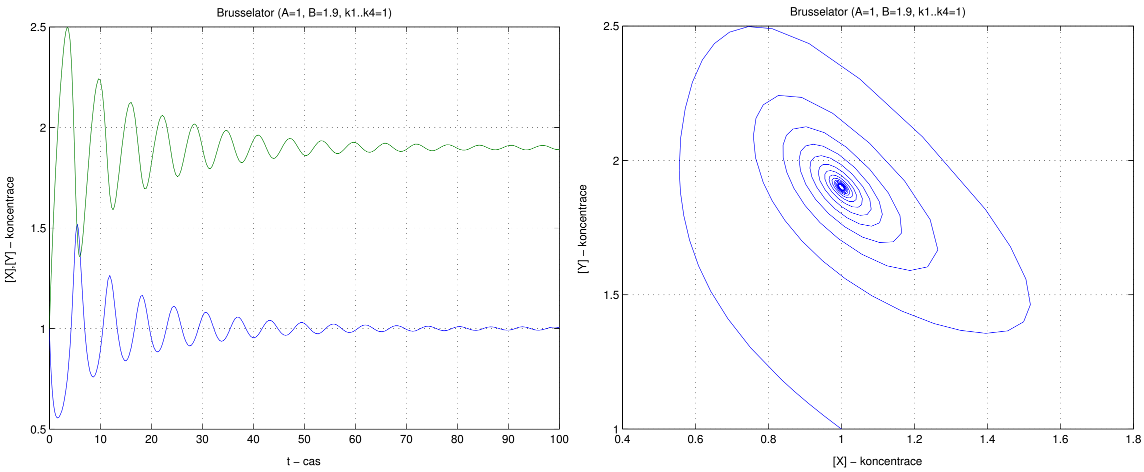
Po splnění podmínky 3.4 se v systému objeví oscilace. Jejich charakter závisí převážně na nastavení hodnot *A* a *B*. Typickou ukázkou oscilací v systému 3.2 nalezneme na obrázku 3.1.

Řešení soustavy 3.2 je v delším časovém měřítku nezávislé na počátečních hodnotách *x* a *y* (resp. koncentrací [X] a [Y] v případě chemické rekce), v následujících simulacích se proto zaměříme převážně na vliv hodnot *A* a *B* (resp. koncentrací [A] a [B]). Pro malá *B* nebo velká *A* existují stabilní stacionární stavy. Čím větší *A* resp. menší *B*, tím rychleji soustava konverguje do stacionárního stavu. Pro ilustraci viz obrázky 3.2 3.3 3.4.

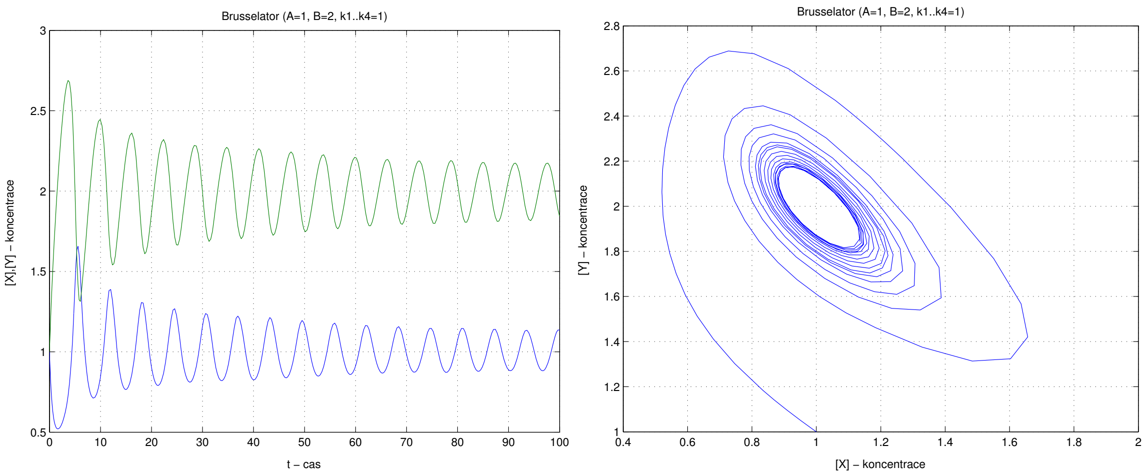
Brusselator ukázal, že je možné za nerovnovážných podmínek dosáhnout oscilací i v takových systémech jimiž jsou chemické reakce, u kterých byl objev tohoto chování revoluční. Z filosofického hlediska jsou však velice zajímavé stavy, kdy nerovnováhu v „koncentracích" *A* a *B* ještě dále prohloubíme. V té fázi totiž nelineární členy rovnice 3.2 začnou způsobovat extrémní chování celku. Z kvalitativního hlediska je zvětšování



Obrázek 3.2.: Brusselator - stabilní stacionární řešení. Z grafu je patrná rychlá konvergence, oscilace jsou postupně utlumené, systém nabývá stabilního stacionárního stavu.



Obrázek 3.3.: Brusselator - stabilní stacionární řešení s rostoucím B. Tento systém se již vyznačuje pomalejší konvergencí díky rostoucí hodnotě konstanty B, tlumení oscilací je slabší a pomalejší.

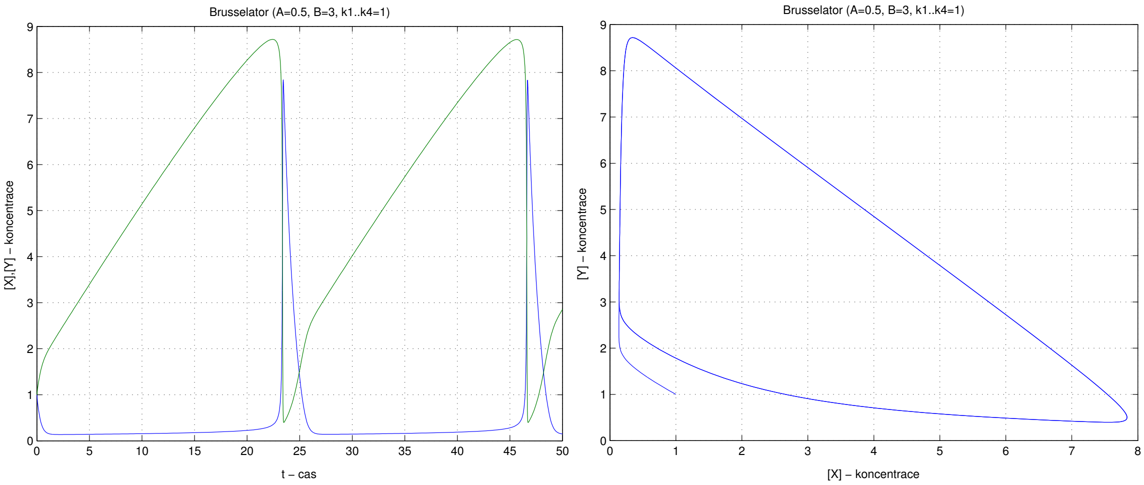


Obrázek 3.4.: Brusselator - přechod do nestabilního stavu. Stacionární řešení již není možné, *B* na kritické mezi.

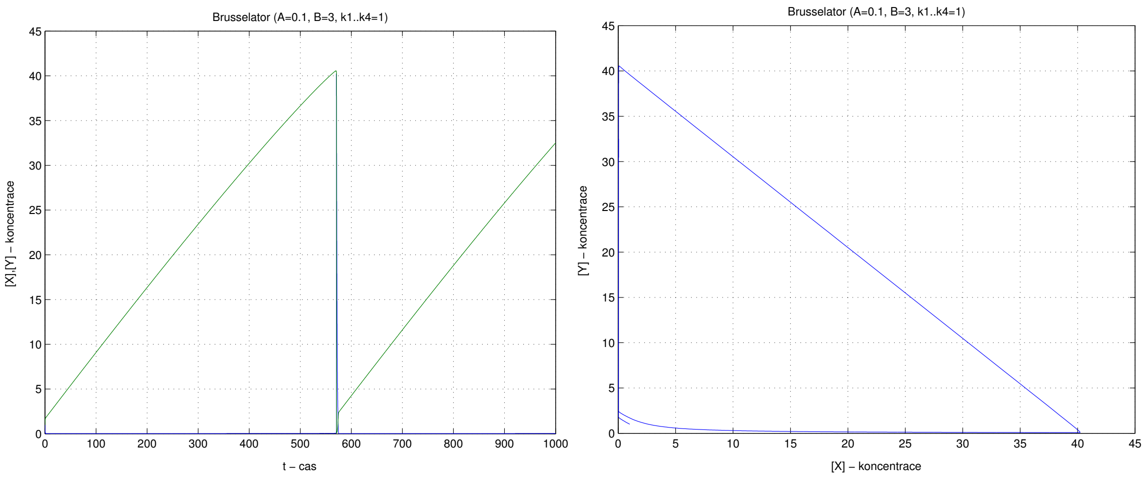
hodnoty *B* téměř totožné se snižováním hodnoty *A*, proto pro jednoduchost budeme manipulovat pouze s jednou z nich.

Porovnejme nyní chování systému z obrázku 3.5 a 3.6 s oscilacemi na obrázku 3.1. Prvně si povšimněme časového měřítka na obrázcích 3.1, 3.5 a 3.6. Snížením hodnoty *A* vlastně došlo k pomalejšímu vznikání složky *X*, doba opakování cyklu se prodlouží, což se dá kompenzovat vhodným nastavením konstant $k_1 \dots k_4$. Časové měřítko však není tou nejdůležitější pozoruhodností. Důležitá je právě ona iluze linearity chování systému. Prakticky po celou dobu cyklu hodnota *Y* lineárně roste, zatímco *X* se drží konstantní hodnoty blízko nuly (následek vznikání malého množství *X* důsledkem malého *A* a rychlého dalšího „zpracování" na *Y*).

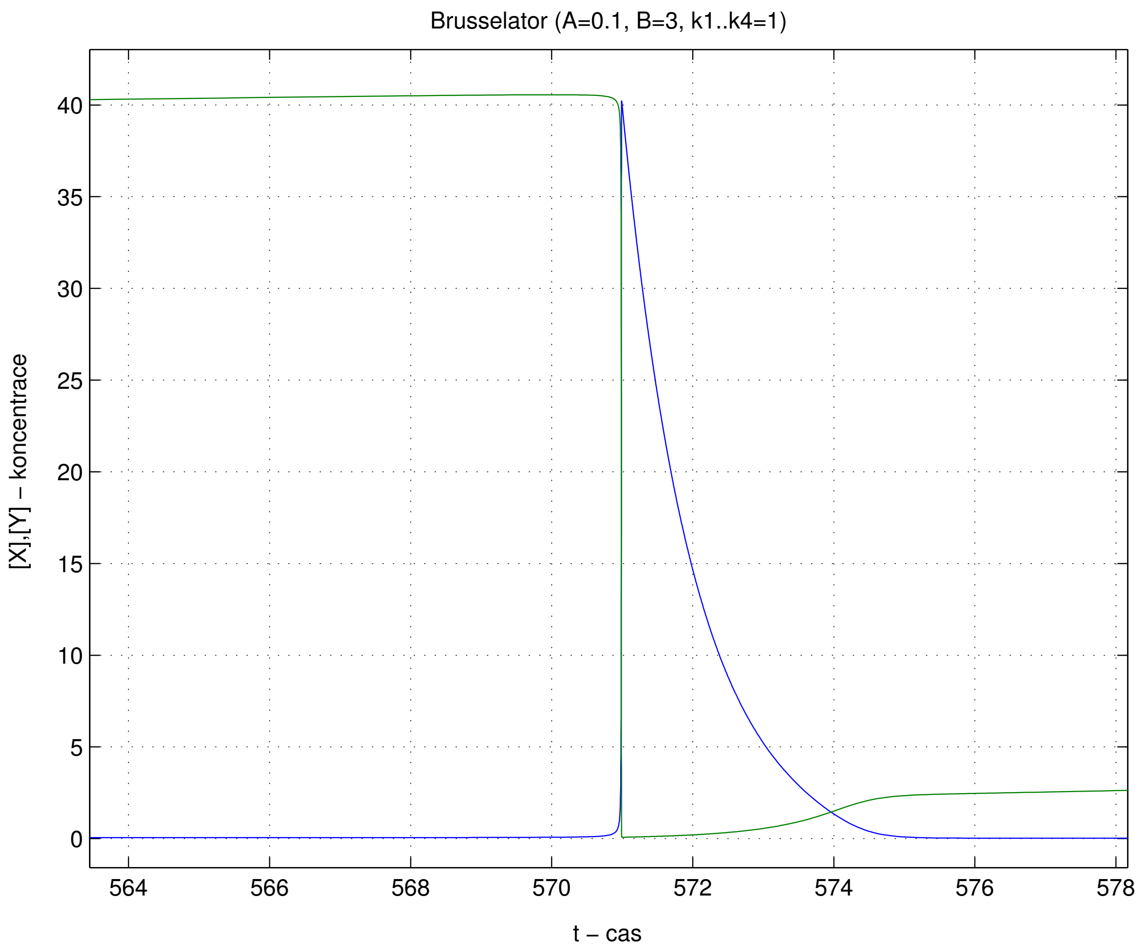
Detail okamžiku přechodu systému do dalšího cyklu je na obrázku 3.7. Zde je vidět, jak zásadní význam mohou nelineární členy mít pro chování a popis procesů. Pokud experimentátor empiricky zkoumá nějaký systém v oblasti lineárního chování, vytvoří pravděpodobně lineární model, který bude daný proces (chemický, geologický, ekologický, sociologický...) popisovat, který ale již nenaznačí, že existuje nějaká kritická mez po jejímž překročení se zcela zásadně změní uspořádání systému. Podobné procesy reálně existují a většinou neexistují modely rozumně predikující námi nastíněné katastrofické chování. Příkladem mohou být zemětřesení, politické převraty, krachy na burze nebo jen obyčejné sypání písku na hromadu, kdy se zrnka písku postupně zachytávají až ke kritické mezi, po jejímž překročení dojde k lavinovitému sesypání vrstvy písku a cyklus se může opakovat. Naopak pokud známe jednotlivé vazby v procesu, pak je možné byť jen nepatrnou změnou jednoho parametru celý systém ovládat a určovat jeho další vývoj - příkladem budiž například vliv a aktivita zpravodajských služeb ve společnosti (která se naplno projeví, podobně jako *X* v našem modelu, nejspíše pouze v okamžiku nějaké výrazné změny), jejich role při politických převratech atd...



Obrázek 3.5.: Brusselator - nízká hodnota A. Se snižováním hodnoty A dochází k linearizaci průběhů koncentrací X a Y mezi jednotlivými cykly.



Obrázek 3.6.: Brusselator - extrémní případ. Průběhy jsou již prakticky lineární až na prudké náhlé změny ke kterým dochází mezi jednotlivými cykly.



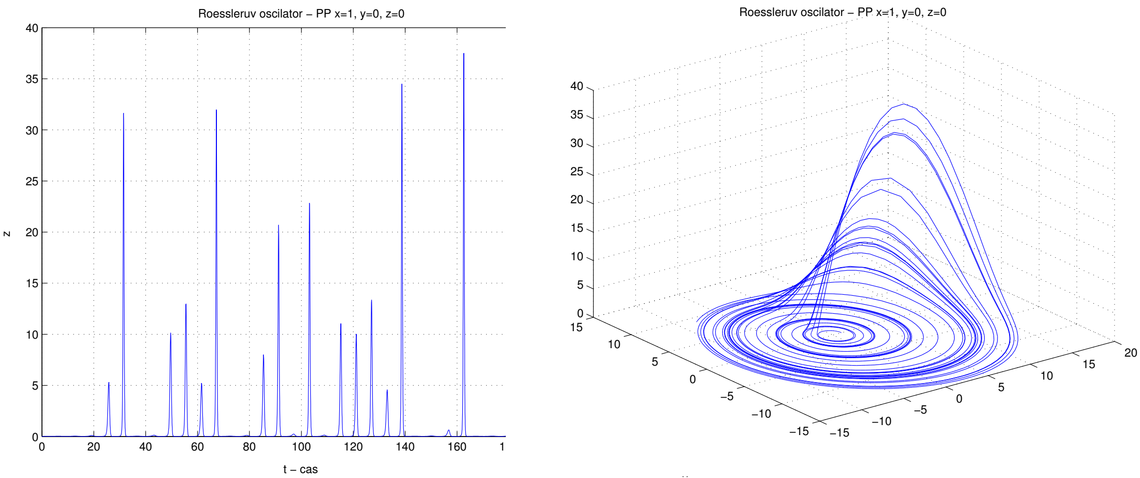
Obrázek 3.7.: Brusselator - okamžik zlomu. Prudká změna hodnot X a Y, začíná nový cyklus.

3.2.2. Roesslerův oscilátor

Nyní rozebereme jeden spíše teoretický model. Roesslerův atraktor [3] (model, oscilátor) je popsán touto soustavou tří diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} &= -y - z, \\
\frac{dy}{dt} &= x + ay, \\
\frac{dz}{dt} &= xz - cz + b.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Simulace zde uvedené byly provedeny se stejnými koeficienty[2] ($a = 0.2 \quad b = 0.2 \quad c = 8$) pro různé počáteční podmínky. Typické řešení této soustavy najdeme na obrázku 3.8.

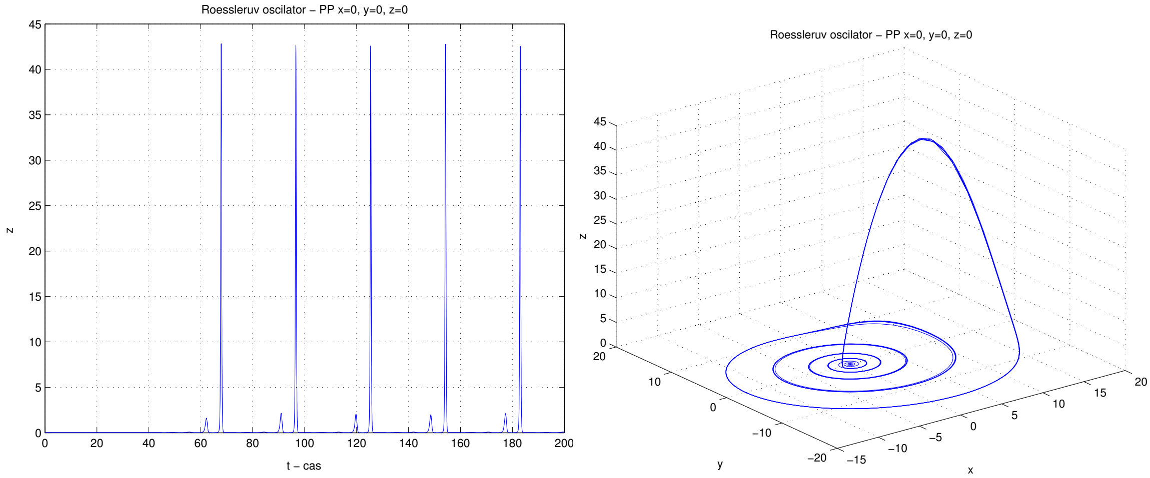


Obrázek 3.8.: „Chaotické” oscilace Roesslerova oscilátoru v ose z a zobrazení ve fázovém prostoru.

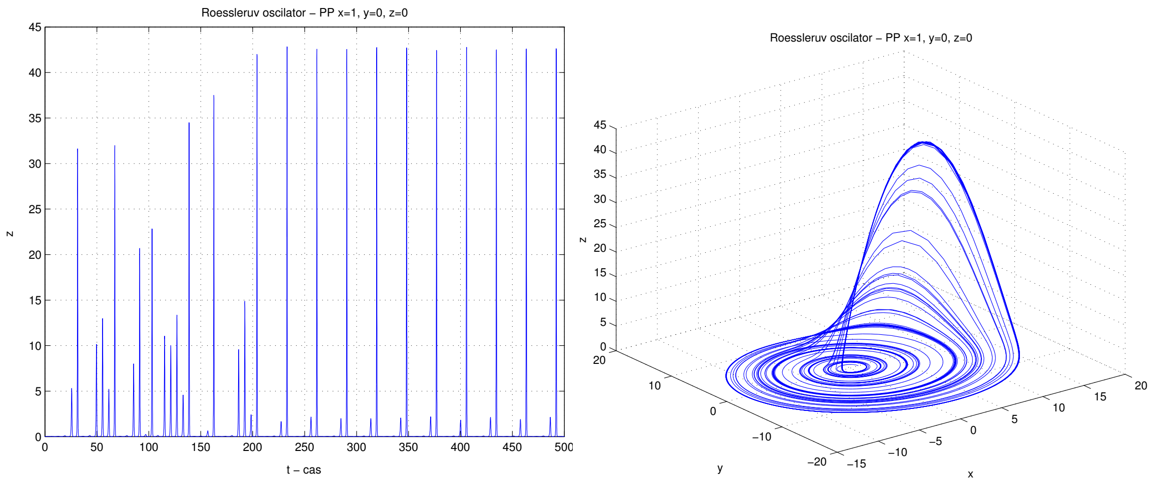
Řešení této soustavy rovnic je velmi citlivé na počáteční podmínky. Dle literatury [3] odchylka mezi trajektoriemi řešení dvou blízkých počátečních stavů s postupem času exponenciálně narůstá. Co se týká stability a konvergence jednotlivých trajektorií k atraktoru viz obrázky 3.9 a 3.10. Zdá se, že přece jen v systému existuje tendence konvergovat k jediné trajektorii s tím, že s postupem času ustávají chaotické oscilace (rychlost konvergence je však extrémně citlivá na počáteční podmínky).

Zajímavé je, že modelovaný systém vykazuje navzdory literatuře [3] tendenci konvergovat k jedné trajektorii. Zda je to způsobené numerickou nepřesností zůstává otázkou, avšak teoreticky by se při nestabilitě (tedy i numerické) od sebe měly trajektorie nekonečně lišit, což nebylo pozorováno. Naopak, vždy byla zjištěna tendence systému oscilovat podle trajektorie, která je nejlépe patrná z obrázku 3.9. Pokud odhlédneme od časového měřítka a zaměříme se pouze na tvar trajektorie, ke které konvergovaly téměř

[2] Nejčastěji používaná kombinace.



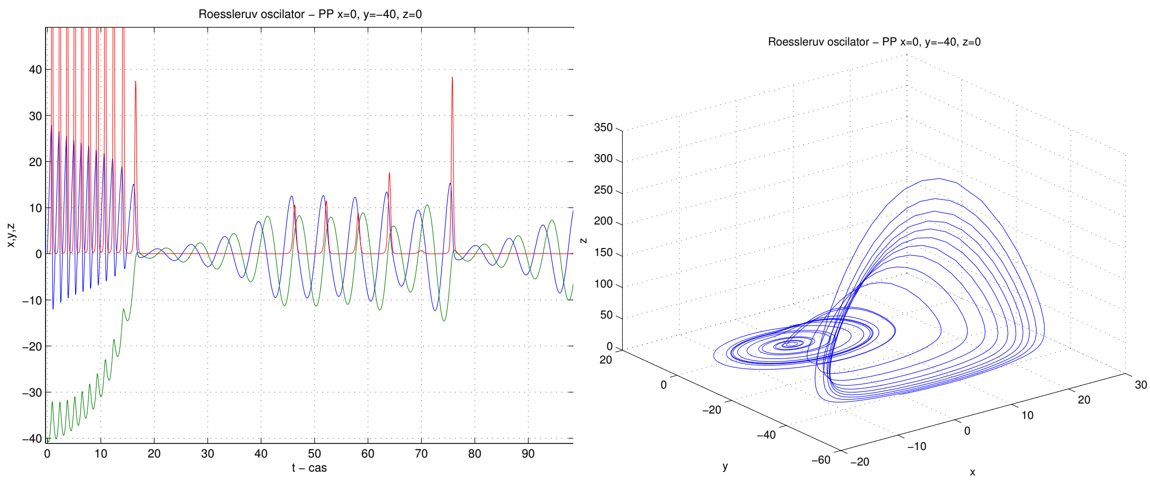
Obrázek 3.9.: Z pozice (0,0,0) systém velice záhy zkonverguje do poměrně stabilně se opakujících oscilací. Zjištěné extrémy pro z nevykazují s rostoucím časem přesně stejnou amplitudu, nicméně výchylky jsou minimální. Možný a pravděpodobný je i vliv numerických nepřesností při výpočtu.



Obrázek 3.10.: Z počátečního stavu (1,0,0) vykazuje systém značně komplikovanější způsob konvergence k atraktoru.

(limit viz dále) libovolné kombinace počátečních podmínek, pak je tento systém vhodným adeptem k dalšímu zkoumání. Zdá se, jako by v systému byl nějaký vzor chování, který nelze exaktně ovládnout a ke kterému se všechna řešení na základě počátečních podmínek snaží[3] přiblížit.

Pro konvergenci k zobrazené trajektorii však existuje limit, k jehož nalezení je opět možné použít vhodnou počáteční podmínku. Jakmile záporná hodnota y překočí jistou mez, systém začne divergovat. V okolí této meze se objeví nové oscilace zcela jiných dimenzí v proměnné z. Jak se systém chová v blízkosti této kritické hranice je patrné na obrázku 3.11.



Obrázek 3.11.: Vznik nových dočasných oscilací v blízkosti meze divergence systému. Oscilace jsou tlumené, vývoj proměnné y nasvědčuje, že model po čase zkonverguje opět do klasického Roesslerova atraktoru. Za povšimnutí stojí též změna roviny oscilací z xy na xz.

Po překročení kritické meze hodnoty y se pak systém od předchozích řešení vzdaluje - viz obrázek 3.12 a 3.13.

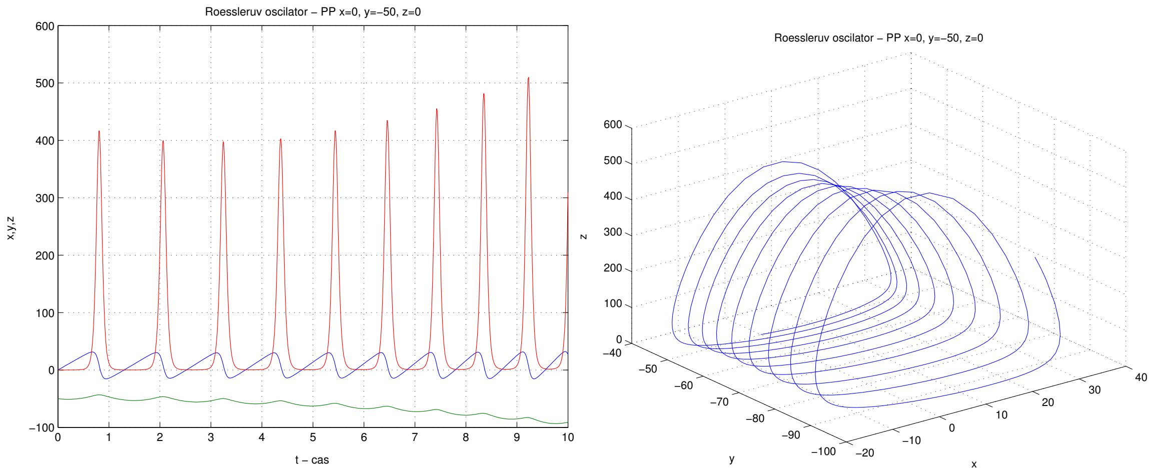
3.2.3. Systém dravec - kořist

Nejjednodušší model pro systémy typu dravec-kořist je tvořen soustavou dvou „antagonistických” rovnic, které jsou jinak také známy jako tzv. Volterrovy-Lotkovy rovnice:

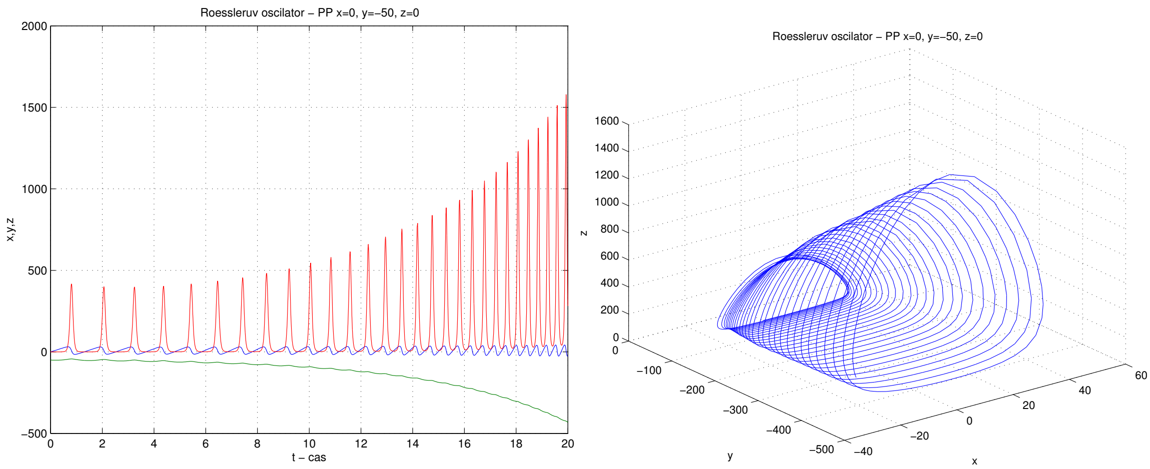
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x - bxy, \\ \frac{dy}{dt} &= -a_2x + bxy, \end{aligned} \qquad (3.6)$$

kde x představuje populaci kořisti, která se živí volně dostupnou potravou a rozmnožuje se úměrně vlastnímu počtu rychlostí ovlivněnou konstantou a_1, je však lovena dravcem -

[3] Byť třeba „nekonečně různě”.



Obrázek 3.12.: Divergence modelu za kritickou mezí, výchylky v proměnné z a y exponenciálně narůstají.

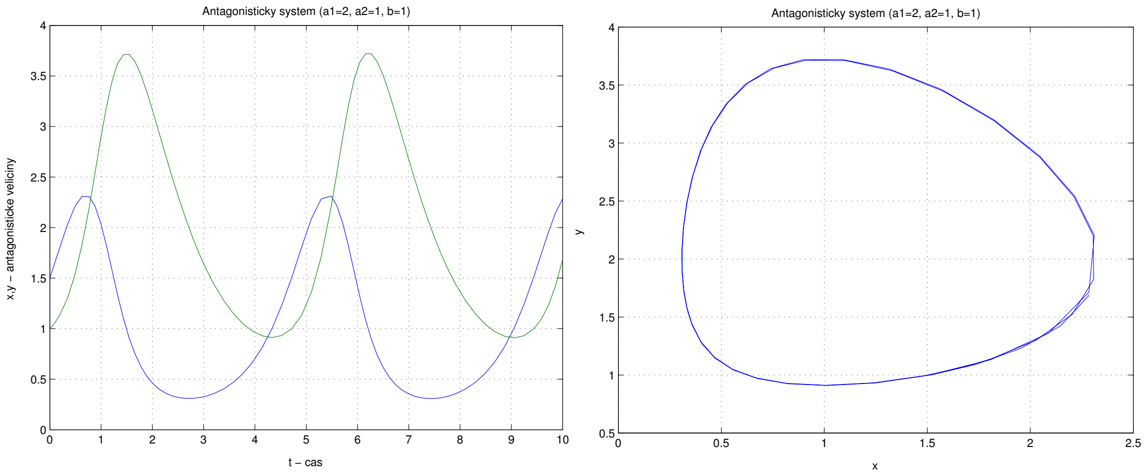


Obrázek 3.13.: Divergence modelu za kritickou mezí, výchylky v proměnné z a y exponenciálně narůstají.

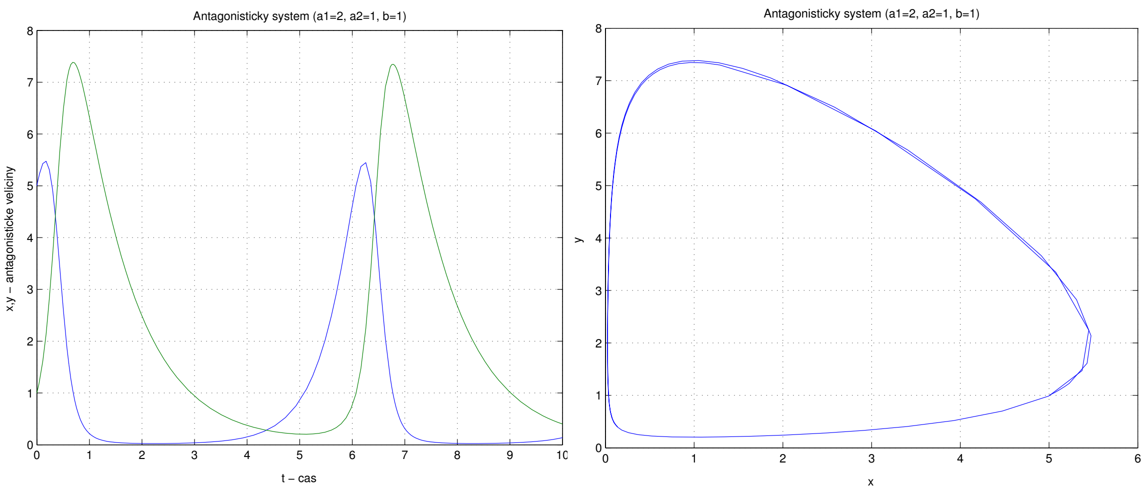
četnost střetů xy obou druhů je modifikována konstantou b, která by mohla být chápána například jako aktivita dravce. Dále y je populace dravce, která vymírá úměrně vlastní četnosti a k přežití potřebuje lovit kořist. Typická evoluce tohoto systému, který až na triviální řešení a stejné počáteční podmínky, nemá stacionární stav je na obrázku 3.14.

Problémem daného modelu je jeho celková závislost na počátečních podmínkách - viz ten samý případ z obrázku 3.14 pro jiné počáteční podmínky na obrázku 3.15. Dalším problémem je možný neredukovaný růst kořisti, která se v tomto modelu může množit zcela neomezeně a také závislost množství odchycené kořisti dravcem pro vysoké počty kořisti na populaci kořisti samotné - dravec loví převážně k vlastnímu přežití a nikoli úměrně s množstvím kořisti.

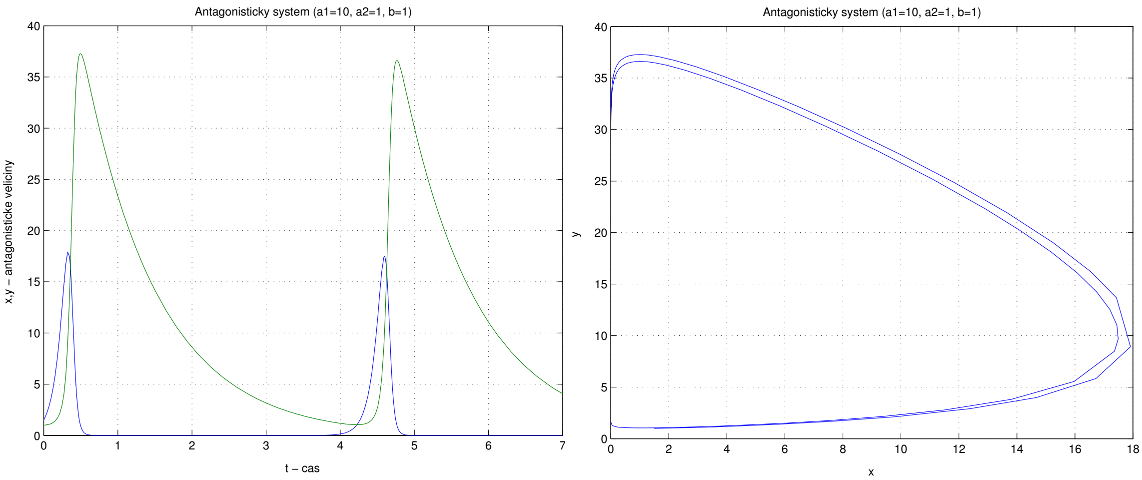
Dalším problémem (obrázek 3.16) daného systému je, že dravec prakticky nemůže vyhynout přestože nebude schopen vyhledávat kořist - zpočátku dojde k neomezenému růstu



Obrázek 3.14.: Jednoduchá závislost typu dravec-kořist v antagonistickém systému.



Obrázek 3.15.: Závislost na počátečních podmínkách v tomto modelu je dominantní vlastností. Snadno se může stát, že vysoká počáteční populace kořisti způsobí rychlý nárůst dravce, který následně prakticky veškerou kořist eliminuje. V realitě by patrně za takového stavu došlo k vyhynutí kořisti. S rozdílem populací v počáteční podmínce rostou i výchylky celého systému. Podobně se systém bude chovat s rostoucím rozdílem mezi parametry a_1 a a_2 .



Obrázek 3.16.: Přílišná množivost kořisti způsobí extrémní nárůst dravce, který téměř veškerou kořist následně vybije. V modelu chybí omezení ve formě jakéhosi populačního stropu a redundantního lovu kořisti dravcem, které by tyto nereálné výsledky modifikovalo.

populace kořisti, která nakonec bude tak dostatečná, že i ten „slepý" dravec nějakou uloví a druh přežije. Zkrátka tento model je příliš zjednodušený.

Přesnější model pro popis závislosti dravec-kořist je tvořen soustavou rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x - b\frac{xy}{r+x} - cx^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -a_2 y + b\frac{xy}{r+x}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

kde kvadratický člen cx^2 funguje jako vyrovnávací faktor pro případ kdy se kořist tak množí, že si jednotliví členové druhu začnou navzájem překážet - kvadratická závislost vyjadřuje vzájemnou interakci. Jmenovatel $r + x$ má pak význam regulace lovu kořisti dravcem, je-li populace kořisti značně vyšší než je nutné k přežití dravce - dravcům pak nehrozí extrémní přemnožení, které mělo za následek problémy předchozího modelu.

Systém rovnic 3.7 již umožňuje stacionární řešení. Vyjádřeno matematicky je to pak:

$$x_s = \frac{a_2 x}{b - a_2}, \tag{3.8}$$

$$y_s = \frac{r + \frac{a_2 r}{b-a_2}}{b}\left(a_1 - \frac{a_2 c r}{b - a_2}\right). \tag{3.9}$$

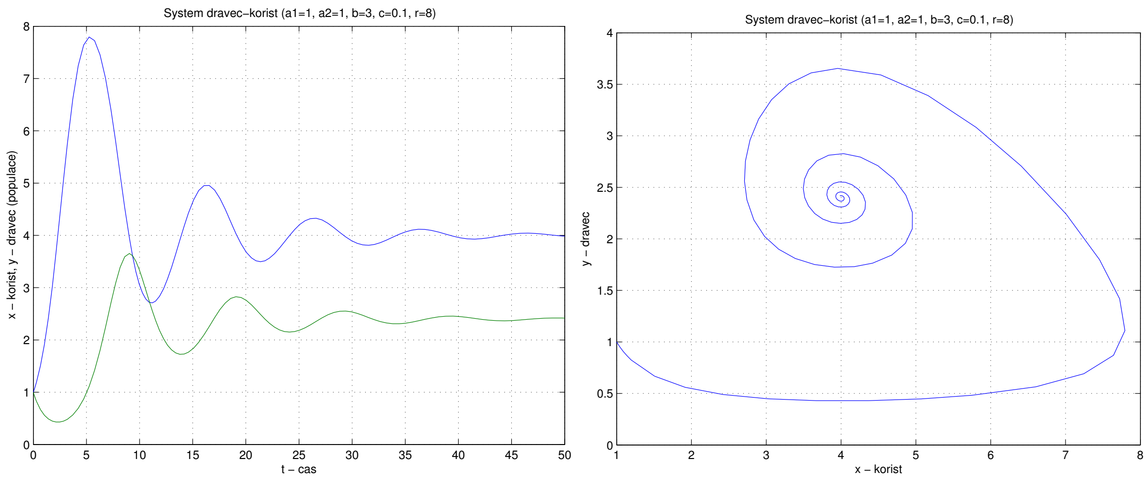
Stacionární řešení soustavy pro populaci musí být vždy větší nebo rovno nule. Následkem toho získáme analýzou rovnic 3.8 a 3.9 nutné podmínky existence kladných stacionárních stavů:

$$\begin{aligned} b &> a_2, \\ a_1 b - a_1 a_2 - a_2 c r &> 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Výhodou tohoto nového systému je také to, že již není závislý na počátečních podmínkách. Vývoj populace za daných předpokladů a podmínek má tři scénáře.

1. dravec vyhyne (nesplnění podmínky 3.10)
2. populace kořisti i dravce se ustálí ve stacionárních stavech, které jsou stabilní a jakákoli náhodná výchylka v populaci systém vrátí zpět do stacionárního stavu
3. obě populace mají oscilativní charakter, oscilace jsou stabilní a nezávisí na počátečních podmínkách

Na obrázku 3.17 je ukázka vzniku stacionárního stavu. Parametr c je natolik malý, že dovolí kořisti se rozumně rozmnožit a zároveň intenzita střetů b je dostatečně vysoká aby dravec přežil.

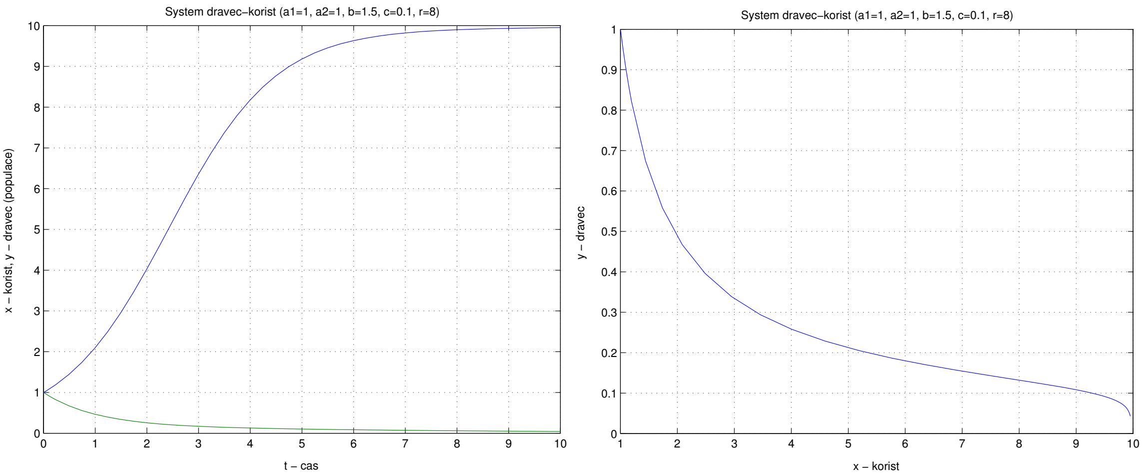


Obrázek 3.17.: Stacionární stavy pro systém dravec-kořist. Podmínka 3.10 je splněna.

Pokud by byla intenzita střetů (aktivita dravce) příliš malá, nebo v případě, že by populační limit pro kořist byl příliš přísný (vysoké c), dravec vyhyne - viz obrázky 3.18 a 3.19.

Vznik oscilací je pak podmíněn vysokou množivostí kořisti a_1, vysokou intenzitou střetů b, malým koeficientem vzájemného vytěsňování c nebo malým parametrem redundantního lovu r (funguje podobně jako b). Ukázky jsou na obrázcích 3.20, 3.21, 3.22 a 3.23.

Co se týká evoluce populace dravec-kořist, pak je jedno kterým parametrem je manipulováno, ve všech případech je možno vhodnou volbou zajistit tři výše zmíněné stavy - vyhynutí dravce, stacionární stav i oscilativní chování.



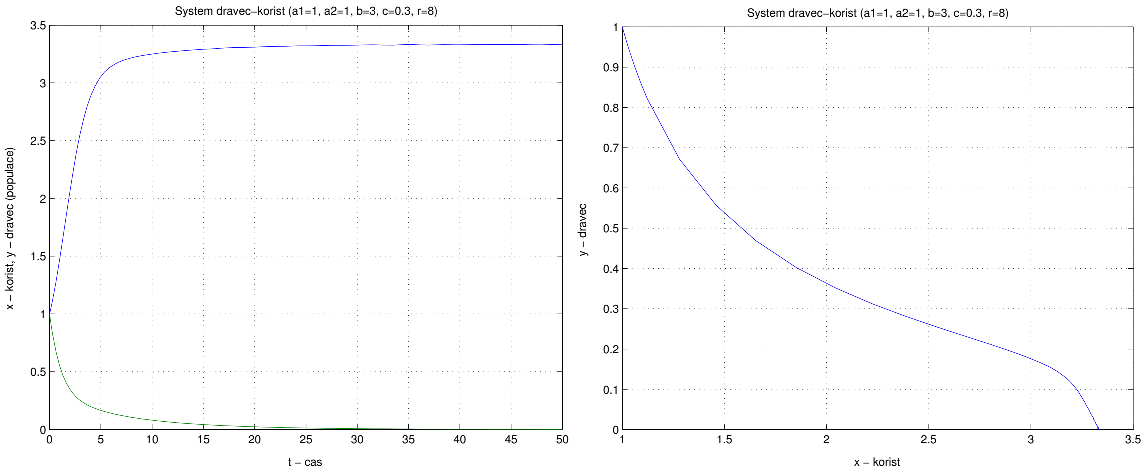
Obrázek 3.18.: Dravec je málo aktivní a nezvládne kořist nalézt, postupně vymírá, zatímco se populace kořisti ustálí na svém maximu. Podmínka 3.10 není splněna.

3.2.4. Shrnutí významu nelinearity v modelech

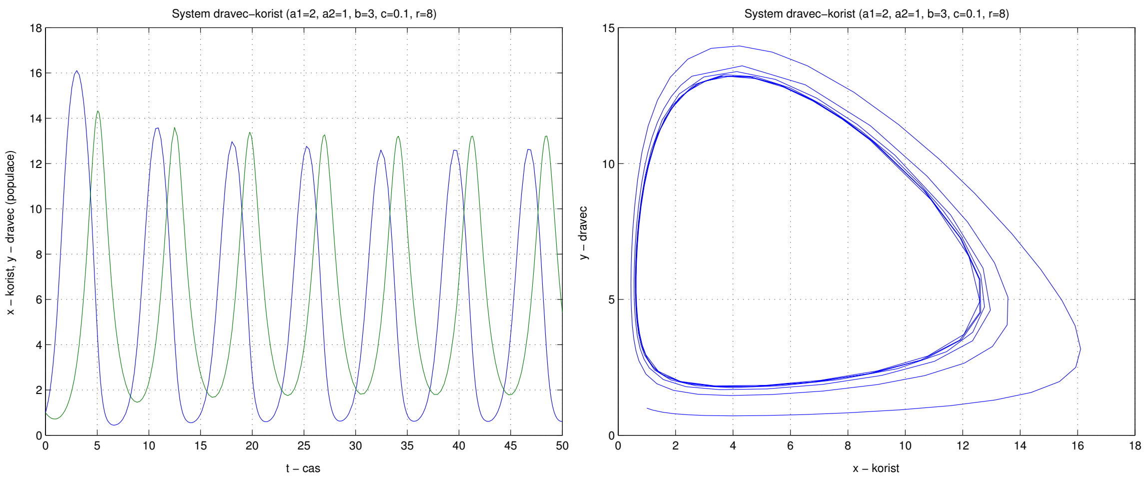
Z uvedených modelů je patrné, jaký vliv mají nelineární členy v diferenciálních rovnicích, kdy v zdánlivě nepodstatná hodnota některé z veličin může být klíčovou pro vývoj celého systému. V případě Brusselatoru bylo zajímavé právě téměř lineární chování systému, které systém vykazoval až do okamžiku velice rychlé, „katastrofické", změny. U Roesslerova atraktoru je bezesporu velice pozoruhodná daná trajektorie, která dle výsledků simulací je konvergentním stavem pro blízké počáteční podmínky. Rozpor oscilativního chování, které bylo pozorováno s postupem času jako pravidelnější a stabilnější je ponechán otevřen k další diskusi, není vyloučena chyba způsobená numerickou nepřesností. Objektem zájmu pro budoucí studium by se rovněž mohl stát jakýsi „antiatraktor" (obr. 3.11, 3.12 a 3.13) který se objeví jakmile se počáteční podmínky dostanou za kritickou hranici, jejíž exaktní určení by zajisté bylo zajímavým výsledkem. U pokročilého modelu pro soustavu dravec-kořist je zajímavé především to, že kořist prakticky nikdy nevymírá (pokud by nedošlo k extrémním, oscilacím[4], které by obě populace vyhubily) a ohroženým druhem v tomto jednovazebném systému je pouze dravec.

Při modelování byl kladen důraz převážně na porozumění danému problému a jednotlivých vazeb veličin v něm obsažených. Rigorózní kvantitativní analýza nebyla prozatím účelem a vyžadovala by hlubší analytické metody. Všechny modely byly provedeny programovým balíkem MATLAB pomocí řešiče ode45.

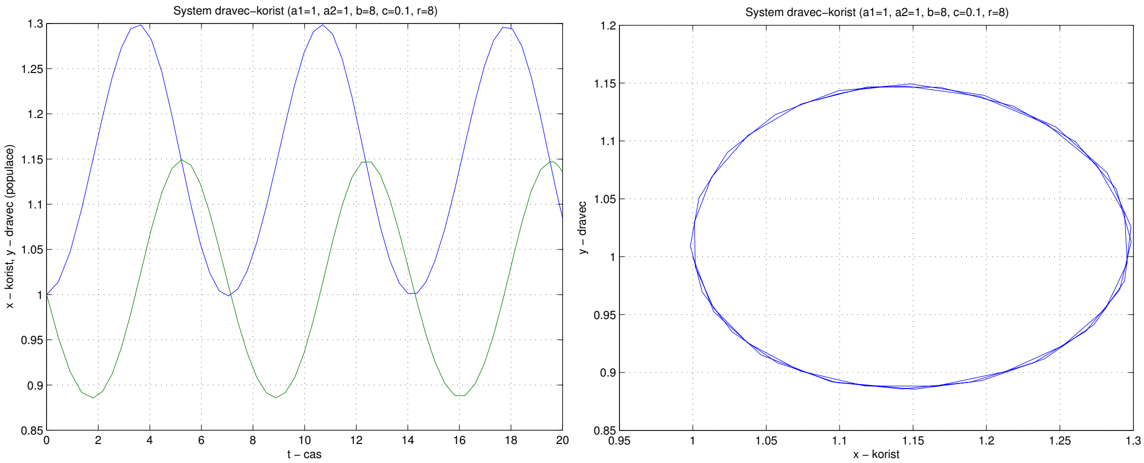
[4] Množství jedinců v obou populacích klesá až téměř k nule - za reálných okolností by došlo k vyhynutí populace.



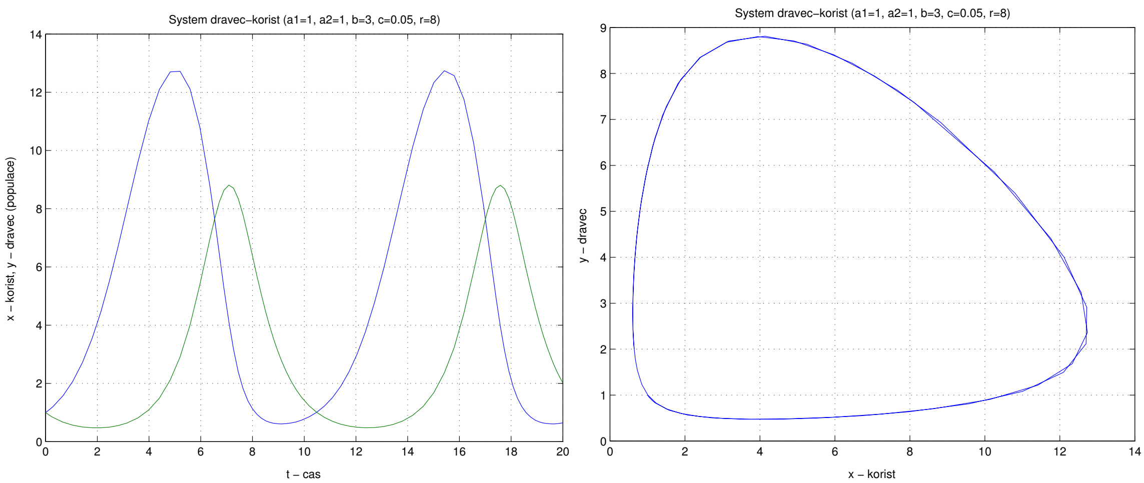
Obrázek 3.19.: Přílišné omezení populace kořisti způsobí vyhynutí dravce. Podmínka 3.10 není splněna.



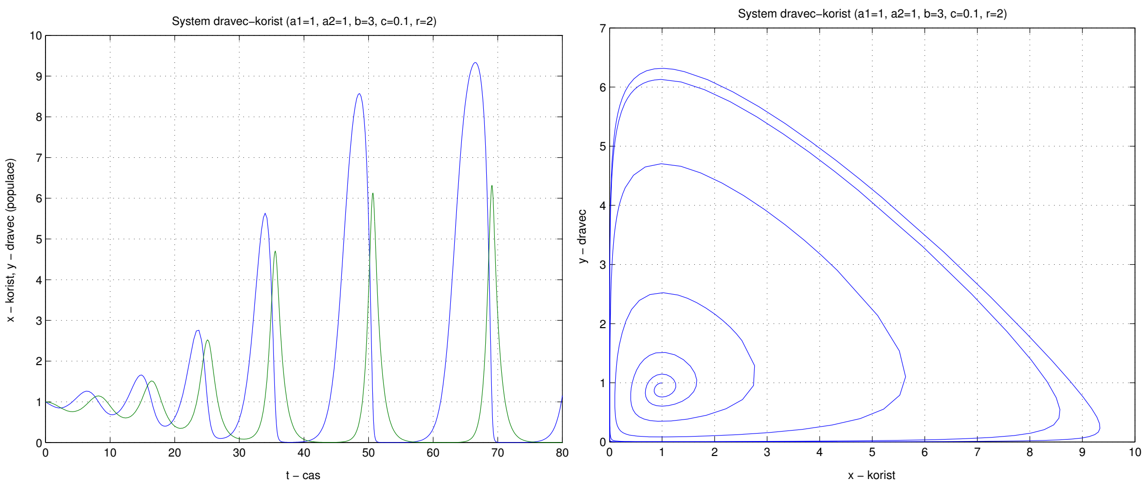
Obrázek 3.20.: Vysoká množivost kořisti způsobí vzájemné oscilace systému dravec-kořist. Podmínka 3.10 je splněna (pro stacionární stav je pouze podmínkou nutnou, nikoli postačující).



Obrázek 3.21.: Aktivita dravce (množství vzájemných střetů) je vysoká, systém začne oscilovat.



Obrázek 3.22.: Vliv populačního omezení kořisti je malý a nemohl se projevit, populace naroste do té míry, že aktivita dravců je dostatečná k jejich rychlému růstu a vybíjení kořisti - vznikají oscilace..



Obrázek 3.23.: Malý parametr r znamená, že dravec bude vybíjet kořist úměrně svému počtu a nenechá se příliš ovlivnit množstvím kořisti (neloví zbytečně, pro potěšení atd...). Dalo by se říci, že se jedná o jakéhosi „poctivého” dravce, který loví jen kolik potřebuje. Vznik fluktuací je zapříčiněn tím, že dravec nereflektuje nárůst kořisti, která se může pohodlně množit. Množení dravce je zde v období hojnosti pouze výsledkem relace mezi jeho vymíráním a aktivitou lovu. Za pozornost stojí také postupný způsob rozkmitání systému.

4. Koncept potřeb

4.1. Obecný systém

V této části se pokusíme o formální vyjádření obecně nedeterministického modelu, umožňujícího popis komplexnějších systémů s neznámými parametry. Tyto neznámé veličiny budou v modelu implementovány jako náhodné s příslušným rozdělením pravděpodobnosti.

4.1.1. Produkce entropie jako proces uspokojení potřeb

Ukazatelem směru vývoje systému se ve vědě stala druhou větou termodynamickou definovaná veličina - entropie. Termodynamický princip nevratnosti říká, že entropie izolovaného systému *nemůže klesat*. Druhá věta termodynamická obecně říká, že kvantitativně vyjádřená produkce entropie *musí být nezáporné číslo*:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \geq 0. \tag{4.1}$$

Pro vyjádření produkce entropie se často používá vztah, který plyne z předpokladu lokální rovnováhy a obsahuje v sobě i bližší informaci o procesu, ke kterému během růstu entropie dochází:

$$\sigma_S = \sum_k J_k F_k, \tag{4.2}$$

kde σ_S je produkce entropie, J_k představuje tok veličiny a F_k termodynamickou sílu. V systému dochází k nárůstu entropie realizací toku ve směru síly, která vzniká na základě existence potenciálu obsaženém v systému, a která je příčinou daného toku. Závislosti velikosti toků na působících silách se nazývají *konstitutivními vztahy*:

$$J_k = J_k\left(F_k\right). \tag{4.3}$$

Pro následující úvahy budeme předpokládat, že obecné vztahy 4.2 a 4.3 lze použít i na množině biologických a sociálních systémů. Relace mezi tokem a silou přejdou z fyzikální roviny, kde hrají roli atomy či molekuly a jejich vazby, do roviny jedinců v biologickém či sociálním systému. Budeme tedy předpokládat, že za pohybem jedince (tok částic) je možno najít působící sílu (termodynamická síla), která deterministicky tento pohyb ovlivňuje, či přímo určuje.

Ze sémantického hlediska budeme sílu nazývat *potřebou* jelikož tento termín lépe odpovídá vžité terminologii v biologii, ekonomii a sociologii. Pohyb jedince pak bude mít smysl *uspokojování potřeb*[1].

4.1.2. Základy formulace modelů

Mějme množinu jedinců, jejichž pohyb chceme modelovat. Pohyb každého z těchto jedinců je určen „silou", která je výsledkem kombinace působících potřeb. Předpokládejme dále, že neznáme veškeré aspekty stavových změn[2] jedince a jsme nuceni k deterministickému vlivu potřeb připočítat odchylku, fluktuaci, která pro nás bude znamenat vliv neznámých skutečností[3]. Obecně lze sílu působící na *i*-tého jedince vyjádřit jako

$$F_i^D = \sum_k f_i^{Dk} + \delta_i^D, \tag{4.4}$$

kde F_i^D představuje výslednou působící sílu na *i*-tého jedince v rámci *D*-prostoru, kterým je míněn stavový prostor ve kterému dochází k popisovanému pohybu[4]. Člen f_i^{Dk} vyjadřuje sílu, jejíž původ náleží do *K*-prostoru, $k \in \{1..K\}$, který představuje množinu všech působících sil (potřeb) rozdílného charakteru[5], a působí na *i*-tého jedince v *D*-prostoru[6]. A konečně δ_i^D má charakter náhodné veličiny, do které zahrnujeme nedeterministické a nepředvídatelné vlivy. Tato náhodná veličina nemusí být obecně zcela nezávislá na jednotlivých silách (potřebách)[7]. Čili předpokládejme že formálně platí:

$$\delta_i^D = \delta_i^D \left(f_i^{D1}, f_i^{D2}, \ldots, f_i^{DK}, \lambda_i^{D1}, \lambda_i^{D2}, \ldots, \lambda_i^{DK} \right), \tag{4.5}$$

kde $\lambda_i^{D1}, \ldots, \lambda_i^{DK}$ mají charakter náhodných veličin s voleným rozložením pravděpodobnosti ovlivňující působení sil $f_i^{D1}, \ldots, f_i^{DK}$. Pohyb (tok) *i*-tého jedince, j_i^D, v *D*-prostoru vyjádříme pak konstitutivním vztahem jako

$$j_i^D = j_i^D \left(F_i^D \right). \tag{4.6}$$

Tolik obecné závislosti. Jakákoli další konkretizace je již závislá na specifikách uvažo-

[1]Touto potřebou pak může být na biologické úrovni například nutnost shánět potravu, rozmnožovat se atd.

[2]Změna polohy, rychlosti, nálady, preferencí, žebříčku hodnot apod.

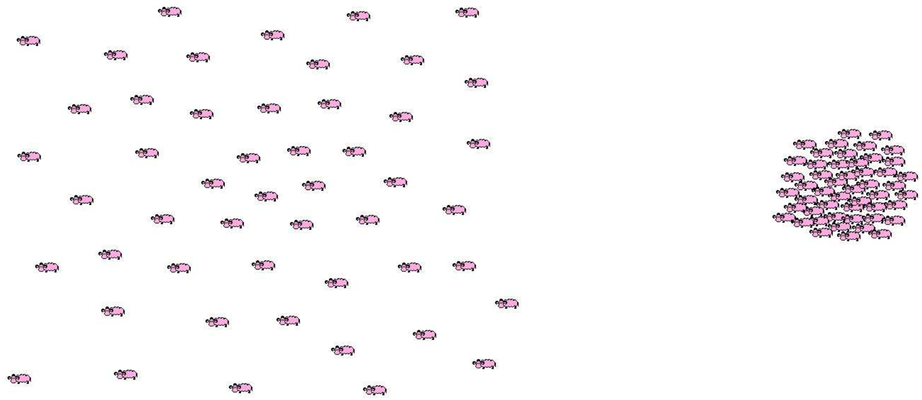
[3]Sem zahrneme všechny jevy, které nejsme schopni na základě znalostí systému vyjádřit jinak než statistickým rozdělením pravděpodobnosti. Mohou sem spadat jak mikroskopické fluktuace, tak i významné změny v projevech chování jedinců.

[4]Může se jednat o klasický třírozměrný prostor, nebo libovolný jiný - například je možno sledovat polohu jedince v prostoru preferencí jednotlivých volebních kandidátů. Obecně má tento prostor mnoho rozměrů v závislosti na tom, jaké stavy jedince chceme sledovat.

[5]Elektromotorická síla, gravitační síla, silná a slabá interakce či například pud sebezáchovy, potřeba komunitního soužití, potřeba shánět potravu atd.

[6]Tyto prostory (*K* a *D*) jsou podstatou kvalitativně odlišné a nezaměnitelné. Jeden z nich je prostorem příčin (*K*) a druhý je prostorem následků (*D*). Běžné konstitutivní vztahy, které udávají relaci mezi silou (příčinou) a jejím následkem (pohybem) jsou většinou formulovány pro jedno konkrétní *k*. V případě existence tzv. křížových efektů, z nichž některé v termodynamice vyjadřují například známé Onsagerovy vztahy, dochází ke vzniku příčiny (síly) v *K*-prostoru pro různá *k* (více sil, potřeb), které pak způsobí pohyb entity v rámci uvažovaného stavového *D*-prostoru.

[7]Například v sociálních systémech.



(a) Počáteční stav.

(b) Stav ke kterému dojde během uspokojování potřeby shlukovat se.

Obrázek 4.1.: Shluk růžových jedinců s komunitní potřebou.

vaném systému. Je zřejmé, že například pro popis pohybu hmotného tělesa v gravitačním poli budou mít konstitutivní vztahy a fluktuace zcela jiný charakter, než v případě popisování pohybu jednotlivých členů smečky vlků.

Pro názornost a jednoduchost budeme nyní uvažovat společenství jedinců, jejichž polohy budeme sledovat pouze na ploše, máme tedy $D = E_2$. Dále předpokládejme, že na tyto jedince působí pouze jedna potřeba a to nutnost komunitního soužití[8]. V okamžiku, kdy v dosahu[9] bude jiný jedinec, začne na ně působit potřeba „být pospolu". V případě, že takových jedinců bude více, bude výsledná síla působit pravděpodobně ve směru největší hustoty výskytu. Tvar této síly, respektive závislost její velikosti s přibývajícím počtem jedinců, není nyní důležitý.

Předpokládáme také, že jedinec, který je ovládán potřebou komunitního soužití, bude tím více spokojen, čím více bude jeho potřeba uspokojena. Jakmile má jedinec pocit, že „je v komunitě", potřeba vyhledávání ostatních jedinců se stává méně významnou a na jeho chování začnou mít vliv dříve méně důležité faktory, například zmíněná fluktuace, které ve zde uvažovaném modelu zabrání kolapsu společenství jedinců do jednoho bodu - viz obrázek 4.1.

K jednoduchému modelu „smečky" tedy postačí jedna potřeba a vliv fluktuace, jejíž detailnější analýzy zatím nebylo zapotřebí a bylo možno ji uvažovat jako nezávislou na stavu uspokojení komunitní potřeby jedince.

Nyní se v náhledu pokusíme podobný přístup aplikovat na složitější systém. V *K*-prostoru budou nyní potřeby dvě. Přidáme nutnost jedinců shánět potravu. K tomuto účelu

[8]To si lze představit tak, že jedinec je ovládán potřebou *být s ostatními* a kdykoli má možnost, pohybuje se ve směru uspokojení této potřeby - vyhledává společnost ostatních jedinců.

[9]V závislosti na systému můžeme uvažovat jako nekonečný, nebo blíže určený konkrétní představou - například jako vzdálenost působení feromonů u hmyzu atd.

využijeme dvou společenství, která jsou známá svým specifickým rozložením jedinců v prostoru.

V prvním případě budeme předpokládat vliv potřeb na pohybn jedinců v systému jako následující[10]:

1. *Potřeba komunitního soužití* má zanedbatelný až nulový vliv v případě, že je v okolí jedince dostatečné množství potravy. V okamžiku nedostatku potravy nabývá na intenzitě a je uspokojena v okamžiku utvoření shluku.

2. *Potřeba shánět potravu* je uspokojena na pasivní bázi dokud je v okolí jedinců dostatečné množství volných živin. Aktivní shánění a následná migrace za potravou se objevují až po uspokojení potřeby komunitního soužití při nedostatku volně dostupné potravy.

3. *Náhodné fluktuace* v tomto systému mohou mít opět charakter nezávislý na potřebách, nicméně hrají důležitou roli během fáze hojnosti, kdy na jedince nepůsobí žádná potřeba a dochází tak k jejich rozptýlení v prostoru.

U takto specifikovaného systému je možné předpokládat chování podobné tomu, které je vlastní populaci hlenky [1]. V období hojnosti potravy jsou jedinci rozptýleni volně po okolí. Když potrava dojde, jedinci se shluknou a společně pak migrují za potravou, kde se opět rozdělí. Je důležité, že k popisu podobného chování postačí úvaha dvou rozlišených potřeb a jejich určitým způsobem definovaných závislostí[11].

Nyní předefinujeme způsob projevu (konstitutivní závislosti) jednotlivých potřeb například takto:

1. *Potřeba komunitního soužití* bude jedince nutit vytvořit shluk a bude závislá na hustotě výskytu jedinců v daném bodě prostoru. Může být vyvolávána a udržována například pomocí feromonů[12], které jedinci vypouštějí do svého okolí. Čím intenzivnější bude feromonový pach v dané lokalitě, tím větší silou budou jedinci k této oblasti vázáni[13].

2. *Potřeba shánět potravu* bude jedince nutit opustit shluk a vyhledat zdroj potravy. Tato tendence se projeví jako snaha o překonání potřeby komunitního soužití. V případě hojnosti stravy (jedinci jsou sytí) bude mít tato potřeba jen malý vliv. V okamžiku, kdy začínají jedinci pociťovat nedostatek potravy, nastanou u nich tendence v radiálním směru společenství opustit a hledat potravu. Při realizaci této

[10] Kvalitativní vyjádření konstitutivního vztahu. Jedná se o námi zvolené předpoklady, na jejichž podkladě zkusíme odhadnout, zda budou aplikovatelné pro popis daného společenství.

[11] Detailní analýza a popis závislosti těchto „potřeb" je pak záležitostí příslušného vědního oboru.

[12] Chemických sloučenin sloužících jako komunikační médium. V našem případě má emise těchto látek funkci „oznámení" o přítomnosti jedince v daném místě.

[13] Pochopitelně s omezením, které zajistí, že ani síla (potřeba), ani hustota jedinců v dané lokalitě nemůže být nekonečná.

cesty však budou neustále vylučovat feromony[14], které ostatní jedince při podobné cestě budou vázat do stop jejich předchůdců[15].

3. *Náhodné fluktuace* zde velmi pravděpodobně způsobí možnost vzniku dané struktury tím, že umožní náhodně vybraným jedincům, byť jen minimálně, poprvé narušit hranici shluku a zavdat tak impuls ostatním.

Velmi pravděpodobně se na základě tohoto modelu jedinci uspořádají do struktury topologicky podobné „dendritickému" schematu mraveniště. Na rozdíl od předchozího příkladu, kde byly potřeby navzájem antagonistické a uspokojení jedné vedlo k dominanci druhé, jsou zde potřeby v zásadě kooperující, a jedinci se pohybují ve smyslu uspokojování jejich kombinovaného působení.

Zdá se, že již při úvaze pouhých dvou potřeb se v závislosti na jejich formulaci mohou jednotlivé systémy od sebe velice lišit. Mechanické a fyzikální systémy bývají často jednoduché, deterministické[16], s velmi málo „potřebami", které navíc bývají velmi přesně kvantifikovatelné. S posunem od fyzikálních systémů do světa chemie, biologie a konečně sociologie dochází k nárůstu počtu ovlivňujících faktorů, množství potřeb, nevyhnutelností zavedení náhodných fluktuací a s tím související hůře realizovatelnou, či dokonce nemožnou, kvantifikovatelností.

4.1.3. Svobodná volba jako strukturotvorný element

V úvodu k tvorbě modelů jsme uvedli fluktuaci δ jako náhodnou veličinu jejíž rozsah je obecně závislý na působících potřebách (silách). Tuto veličinu můžeme pochopitelně vyjádřit například jako

$$\delta\left(f^1,\ldots,f^K\right) = \delta_0 + \delta_f\left(f^1,\ldots,f^K\right), \tag{4.7}$$

čímž náhodnou složku v modelu rozdělíme na dvě části. První bude nezávislá na aktuálním působení jednotlivých sil f^k a bude mít bez ohledu na podmínky stále stejný charakter[17]. Druhý člen již bude pouze „pseudonáhodný" - charakter této náhodné veličiny (rozdělení pravděpodobnosti) je deterministicky určen aktuálním stavem potřeb, tento člen může být v konkrétní situaci (viz dále) i nulový.

Nezávislá složka δ_0 se bude primárně projevovat jako malá fluktuace v tocích vyvolaných působícími silami. Systém zůstane pod jejím vlivem stále řízen potřebami, nikoli však zcela deterministicky, bude navíc ještě ovlivněn náhodným způsobem složkou δ_0. Například v situaci na obrázku 4.1 může být tato veličina určující pro velikost daného

[14] Čímž „zaznamenávají" svou existenci na příslušné místo v prostoru.

[15] Pro lepší představu lze celý proces připodobnit ke kaluži vody na skle. Povrchové napětí drží kaluž víceméně pohromadě. Jakmile začneme toto sklo postupně naklánět, dostaneme se do bodu, kdy se z této kaluže vydělí kapička, která s sebou následně strhne celý pramínek - další jedinci hledající potravu se vydají cestou nejmenšího odporu určenou *kombinací* působících potřeb.

[16] Systém je přesně popsán, náhodné fluktuace se neuvažují či zanedbávají, což je ve většině případů zcela adekvátní.

[17] Statistické rozdělení.

stáda (smečky, hejna) a rozptýlenost jedinců, je nezávislou proměnnou v modelu. Zároveň však má tato nezávislost rozkladný efekt na stávající vytvořené struktury a brání tvorbě struktur nových. Například pokud by měl jedinec zcela opustit stádo a případně se skupinkou dalších založit nové v jiné části prostoru, musel by překonat hranici působení potřeby, která ho k současnému stádu (komunitě) váže. Pokud bychom tuto tendenci chtěli vyjádřit pomocí nezávislé náhodné veličiny, jediným možným způsobem bude vliv této náhodné veličiny zvyšovat až do okamžiku, kdy budou mít jedinci příležitost se od stáda oprostit[18]. Díky nezávislosti a neustálému působení této náhodnosti na všechny jedince bez ohledu na stav jejich aktuálních potřeb[19] dojde po překročení prahu působení komunitní potřeby náhodnou veličinou k její dominanci v celém systému s následkem zániku smečky, *zániku již existující struktury*.

Závislá složka náhodné veličiny se bude projevovat podle aktuálního stavu potřeb[20]. Hlavní myšlenka tohoto přístupu vychází z předpokladu že v okamžiku uspokojení potřeby (či více potřeb) se jedinec nachází ve stavu, ve kterém má možnost udělat rozhodnutí, které *nebude ovlivněno potřebami*. Například pokud máme hlad, pak je pravděpodobné, že naše akce budou ovlivňovat náš pohyb a směřovat nás k uspokojení potřeby se nasytit. Jakmile budeme sytí, pak za předpokladu, že nás neovlivňuje další potřeba, máme možnost učinit rozhodnutí a následně vykonat akci, která bude *zcela nezávislá* na naší potřebě se nasytit. Můžeme se vydat do lesa, k řece, číst si knihu nebo dělat cokoli jiného, co však nebudeme dělat v okamžiku, kdy máme hlad.

Tak je například myslitelná situace, kdy je jedinec uprostřed stáda tak dokonale spokojen, že jej napadne celé toto stádo opustit. Díky tomu, že veškeré jeho potřeby byly uspokojeny a žádná další na něj již nepůsobí, má pro tuto chvíli možnost *svobodné volby*. V takovéto situaci daný jedinec skutečně může stádo zcela neočekávaně a „iracionálně” opustit. Dostane-li se dostatečně daleko za hranici na kterou je schopen vnímat jedince ostatní, k původnímu stádu se již nemusí vrátit[21] ani v případě, kdy na něj opět začne díky jeho samotě působit potřeba komunitního soužití. Avšak v okamžiku kdy dojde ke střetnutí s jiným stádem či jiným osamělým jedincem, působící potřeba zapříčiní opětovné začlenění jedince do komunity či dokonce utvoření komunity nové[22].

Je známo, že počátky uměleckých a filosofických sklonů člověka jsou vázány na rozumnou míru blahobytu, kdy jsou uspokojeny alespoň nejzákladnější potřeby přežití. Lidé je pak přestanou vnímat jako potřeby a v krátkodobém měřítku dokáží být na těchto vlivech i nezávislí. Tyto nezávislé pohyby, jejichž příčina nemá s dosavadním působením a projevy jedinců v uvažovaném světě nic společného, jsou pravděpodobně jedním ze způsobů vniku nových kvalit ve společnosti[23].

[18] Fluktuace bude tak veliká, že „posune” jedince v prostoru až za hranici působení komunitní potřeby.

[19] Připomeňme, že potřeby určují jejich chování a i za vznikem prvotní struktury, kterou je v tomto případě smečka či stádo, byla nějaká potřeba.

[20] Záleží na nás, abychom tyto vazby určili v závislosti na konkrétní aplikaci.

[21] Pokud se tak nestane náhodným procesem při jeho toulkách krajem.

[22] V případě interakce osamělých jedinců mimo jejich původní komunitu.

[23] Nezávislost na potřebách může mít v rámci přechodu do nového kvalitativního uspořádání i rozkladný efekt. Jako příklad může posloužit známá historická skutečnost průběhu rozpadu Římské říše. Míra blahobytu vrstvy obyvatelstva vytvářející identitu říše, byť dosažená prací otroků, způsobila pocit ne-

Zajímavé je analyzovat případy, kdy primárním impulzem ke vzniku nové struktury je právě *svobodné rozhodnutí*[24]. K udržení této nově vzniklé kvality je však opět zapotřebí nějaké potřeby tuto kvalitu v existenci uchovávající. Podobně jako nově vzniklá smečka se udrží jen v případě, kdy jedinci mají potřebu se smečky držet, stejně tak nový filosofický, umělecký, náboženský či politický směr bude existovat jen tehdy, dokud bude mít nějaké stoupence.

4.2. Model společenství s jednou potřebou

Nyní se pokusíme na základě představ, které byly shrnuty výše utvořit jednoduchý kvalitativní model společenství s jednou potřebou.

4.2.1. Formulace systému

Uvažujme prostor, ve kterém se vyskytují jedinci. Počáteční rozložení pravděpodobnosti výskytu jedinců v dané lokalitě budeme volit libovolně podle našich požadavků při zkoumání chování systému[25]. Parametry systému jsou shrnuty v tabulce 4.1.

proměnná	význam
N	počet jedinců
$\vec{r}_i$	poloha *i*-tého jedince v prostoru
R_u	rádius uspokojení
Ω_i	oblast uspokojení *i*-tého jedince
R_p	rádius působení
Ψ_i	oblast působení *i*-tého jedince
n_u	počet jedinců v oblasti určené R_u potřebných k dosažení uspokojení
δ	maximální hodnota náhodné veličiny
s	maximální možný krok jedince v prostoru za jednotku času

Tabulka 4.1.: Parametry systému s jednou potřebou

Oblasti uspokojení a působení jsou obecně definovány takto

$$\vec{r} \in \Omega_i \Leftrightarrow |\vec{r} - \vec{r}_i| \leq R_u, \tag{4.8}$$

$$\vec{r} \in \Psi_i \Leftrightarrow |\vec{r} - \vec{r}_i| \leq R_p. \tag{4.9}$$

závislosti těchto jedinců na stávající společnosti do té míry, že nebylo možné zabránit rozpadu společenství „zevnitř" (propuknutí povstání otroků a nedostatečná vnitřní ochrana před vnějšími „barbarskými" tendencemi).

[24] Rovněž se zde nabízí paralela se vznikem nových struktur v rámci nerovnovážné termodynamiky, kdy fluktuace hrají významnou úlohu při přehodu stávajícího systému z oblasti stabilních stavů do nestabilních. Na konkrétní fluktuaci pak závisí, jakým směrem se bude systém z nestabilního stavu dále vyvíjet.

[25] Převážně budeme zkoumat vývoj společenství při rovnoměrném počátečním rozdělení a při rozdělení odpovídající Diracovu impulsu.

Index i značí *i*-tého jedince. Počty jedinců v oblastech uspokojení a působení lze vyjádřit jako[26]

$$n_{i\Omega} = \text{card}\,\{k; i \neq k, |\vec{r_k} - \vec{r_i}| \leq R_u\}\,, \tag{4.10}$$

$$n_{i\Psi} = \text{card}\,\{k; i \neq k, |\vec{r_k} - \vec{r_i}| \leq R_p\}\,. \tag{4.11}$$

Chování jedinců bude určeno dvěma jednoduchými pravidly, která zde nastíníme a budeme exaktně definovat dále:

- Pokud v oblasti Ω_i je ostatních členů $n_{i\Omega} < n_u$, má jedinec potřebu se pohybovat směrem, ve kterém je v oblasti Ψ_i největší množství ostatních. Za touto hranicí oblasti není jedinec již schopen registrovat ostatní jedince ani společenství. Vybraným směrem se pak vydá náhodně velikou rychlostí v rozsahu $< 0, s >$.

- V okamžiku, kdy v oblasti Ω_i splní počet členů podmínku $n_{i\Omega} \geq n_u$, přestane na jedince působit potřeba komunitního soužití a naplno se projeví jeho svobodná volba jako fluktuace polohy v rozmezí $< 0, \delta >$, která představuje přesun jedince náhodným způsobem zcela nezávisle na přítomnosti ostatních. Stejné chování bude vlastní jedinci, který se nachází ve stavu, kdy v jeho okolí Ψ_i, které je schopen vnímat, není žádný další jedinec.

Aby se jedinec mohl díky svobodnému rozhodnutí vymanit z vlivu komunitní potřeby, musel by při svém pohybu toto rozhodnutí stále uchovávat v paměti až do doby, kdy by spojitým pohybem stanoveného cíle dosáhl. V případě disktrétního toku času je možno toto rozhodnutí realizovat v jediném skoku a tudíž není nutné uvažovat „paměť" jedince.

Abychom se tedy vyhnuli problémům spojených s nutností zavedení „paměti" zjednodušíme náš model tak, že nebude formulován ve spojitém čase, ale v čase diskrétním s časovým krokem Δt. Polohu jedince lze pak vyjádřit jako:

$$\vec{r}_i(t + \Delta t) = \vec{r}_i(t) + \Delta\vec{r}_i(t), \tag{4.12}$$

kde $\Delta\vec{r}_i(t)$ vyjadřuje změnu polohy jedince. V souladu s 4.4, 4.4 a 4.7 lze tuto změnu zapsat jako

$$\Delta\vec{r}_i(t) = (1 - \varphi(\vec{r}_i))\,\vec{S}(\vec{r}_i, s) + \varphi(\vec{r}_i)\vec{\Lambda}(\vec{r}_i, \delta) + \vec{\varepsilon}(\vec{r}_i). \tag{4.13}$$

Funkce $\varphi(\vec{r}_i)$ představuje uspokojení potřeby komunitního soužití a je definována jako

$$\varphi(\vec{r}_i) \;=\; 0 \Leftrightarrow n_{i\Omega} < n_u \wedge n_{i\Psi} > 0, \tag{4.14}$$

$$\varphi(\vec{r}_i) \;=\; 1 \Leftrightarrow n_{i\Omega} \geq n_u \vee n_{i\Psi} = 0. \tag{4.15}$$

Vztah 4.14 vyjadřuje nespokojenost, naproti tomu 4.15 zase stav spokojenosti. Funkce $\vec{S}(\vec{r}_i, s)$ udává posun jedince ve směru působící potřeby, v našem případě ve směru výskytu většího množství jedinců v oblasti Ψ_i.

$$\vec{S}(\vec{r}_i, s) = \vec{v}(\vec{r}_i)w(\vec{r}_i, s), \tag{4.16}$$

[26]Funkce card má význam mohutnosti množiny prvků. Prvky této množiny jsou dále specifikovány podmínkou.

kde $\vec{v}(\vec{r}_i)$ představuje jednotkový vektor ve směru pohybu

$$\forall \vec{r}_k \in \Psi_i, \quad \left|\sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_k - \vec{r}_i)\right| > 0 : \qquad \vec{v}(\vec{r}_i) = \frac{\sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_k - \vec{r}_i)}{\left|\sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_k - \vec{r}_i)\right|}. \tag{4.17}$$

V případech kdy $\forall \vec{r}_k \in \Psi_i, \quad \left|\sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_k - \vec{r}_i)\right| = 0$ můžeme vektor generovat jako jednotkový náhodného směru či jako nulový[27].

Dále pak $w(\vec{r}_i, s) \in < 0, s >$ reprezentuje náhodnou veličinu, která má zvolené rozdělení. Funkce $\vec{\Lambda}(\vec{r}_i, \delta)$ pak má význam náhodného vektoru přesunu jedince v okamžiku, kdy má možnost svobodné volby nezávislé na potřebách. Rozdělení pravděpodobnosti této veličiny opět volíme. Platí, že

$$\left|\vec{\Lambda}(\vec{r}_i, \delta)\right| \leq \delta. \tag{4.18}$$

Nakonec ještě $\vec{\varepsilon}_i$ je nezávislou náhodnou veličinou reprezentující elementární nezávislé fluktuace. Má pouze minimální vliv a tedy platí

$$\max|\vec{\varepsilon}_i| \ll \max\left|\vec{\Lambda}(\vec{r}_i, \delta)\right| = \delta, \qquad \max|\vec{\varepsilon}_i| \ll \max\left(w(\vec{r}_i, s)\right). \tag{4.19}$$

4.2.2. Diskrétní 1D model

Konkrétní model dle výše uvedeného schematu utvoříme jako diskrétní v čase i prostoru, se všemi parametry a veličinami nabývajícími pouze diskrétních hodnot. Poloha i-tého jedince bude určena diskrétní proměnnou r_i. Svět a aktuální rozmístění jedinců v něm budou reprezentovány vektorem $X = (X^1, X^2, \ldots, X^M)$, kde prvek X^k udává počet jedinců v „prostoru" X na pozici k, M je rozlehlost světa.

$$X^k(t) = \text{card}\left\{i; r_i(t) = k\right\}. \tag{4.20}$$

Prostor budeme tedy modelovat jako jednorozměrný. Nechceme zjistit nic jiného než pouze polohu každého jedince v okamžiku $t+1$. Změna polohy každého jedince se provede tedy podle následujícího algoritmu:

1. Pokud $\sum_{k=r_i-R_u}^{r_i+R_u} X^k - 1 < n_u$ a zároveň $\sum_{k=r_i-R_p}^{r_i+R_p} X^k - 1 > 0$[28], pak je jedinec nespokojen a vydává se směrem, ve kterém je v intervalu $< r_i - R_p, r_i + R_p >$ více jedinců (nebo zůstane na místě pokud jsou počty na obou stranách stejné) a to rychlostí[29] náhodně zvolenou v intervalu $< 1, s >$.

[27] V konkrétním modelu, který je uveden dále, byl za těchto okolností volen vektor (směr pohybu jedince) jako nulový.

[28] Pro uspokojení je v dané oblasti málo ostatních jedinců a zároveň je alespoň jeden v dosahu, 1 odečítáme z důvodu, že jedinec nepočítá sám sebe.

[29] Krokem za jednotku času.

2. Pokud podmnka z prvního bodu neplatí[30], znamená to, že jedinec necítí v aktuálním okamžiku žádnou potřebu, jeho jednání bude čistě svobodné a namísto deterministicky určeného směru se vydá zcela náhodným směrem s krokem, který bude opět náhodné velikosti vybrané z intervalu $< 0, \delta >$.

3. K celkovému pohybu je ještě připočtena minimální fluktuace, jejímž smyslem je zavést náhodnost na nejnižší, elementárnější, úrovni a tato fluktuace může posunout celkový pohyb jedince libovolným směrem o jednotkovou[31] nebo nulovou vzdálenost.

Počáteční rozdělení vybereme tak, aby systém v čase $t = 0$, začínal buď tím, že všichni jedinci budou na jednom místě (Diracův impuls), nebo rovnoměrným rozložením jedinců v prostoru, které opět vygenerujeme jako náhodné. Další vlastností tohoto myšleného světa je, že je na krajích sám do sebe uzavřen, čili prvek $X^{M+1} = X^1$ a podobně $X^0 = X^M$. Počet jedinců se s časem nemění.

Rovnice 4.13 přejde do tvaru

$$\Delta r_i(t) = (1 - \varphi(r_i))\, S(r_i, s) + \varphi(r_i)\Lambda(r_i, \delta) + \varepsilon(r_i), \tag{4.21}$$

kde

$$\begin{aligned}
\varphi(r_i) &= 0 \Leftrightarrow \sum_{k=r_i-R_u}^{r_i+R_u} X^k - 1 < n_u \wedge \sum_{k=r_i-R_p}^{r_i+R_p} X^k - 1 > 0, && (4.22)\\
\varphi(r_i) &= 1 \Leftrightarrow \sum_{k=r_i-R_u}^{r_i+R_u} X^k - 1 \geq n_u \vee \sum_{k=r_i-R_p}^{r_i+R_p} X^k - 1 = 0. && (4.23)
\end{aligned}$$

Rovnice 4.16 bude vypadat takto

$$S_i(r_i, s) = \text{sgn}\left(\sum_{k=r_i+1}^{r_i+R_p} X^k - \sum_{k=r_i-R_p}^{r_i-1} X^k \right) w_i(s). \tag{4.24}$$

K vyjádření náhodných veličin $w_i(s) \in < -s, s >$, $\Lambda(r_i, \delta) \in < -\delta, \delta >$ a $\varepsilon(r_i) \in < -1, 1 >$[32] bylo vybráno rozdělení pravděpodobnosti odpovídající rozdílu dvou rovnoměrných rozdělení[33].

[30] V dosahu nejsou vůbec žádní jedinci, nebo jich je v malé oblasti kolem aktuálního jedince tolik, že mu to stačí ke spokojenosti.

[31] V diskrétním světě minimální nenulová hodnota.

[32] Diskrétně se tedy jedná o hodnoty $\{-1, 0, 1\}$.

[33] Pro tuto realizaci svědčily dva důvody. Prvním byla snazší algoritmizace, kdy k vyjádření vektoru náhodných veličin stačilo vygenerovat dva náhodné vektory a ty od sebe odečíst. Zadruhé pak výsledné rozdělení vykazuje lineární pokles hustoty pravděpodobnosti od počátku až k nule v mezních hodnotách.

Poloha *i*-tého jedince v čase $t+1$ je tedy na základě vztahu 4.21 s přihlédnutím k 4.12

$$r_i(t+1) = r_i(t) + \Delta r_i(t). \tag{4.25}$$

Výsledné rozložení jedinců v prostoru dostaneme jako

$$X^k(t+1) = \text{card}\left\{i; r_i(t+1) = k\right\}. \tag{4.26}$$

4.2.3. Rozbor modelu v rámci různých hodnot parametrů

Jako výchozí soubor parametrů pro porovnávání chování modelu v závislosti na jejich změně byla zvolena následující kombinace:

parametr	popis
$N = 100$	počet jedinců
$M = 200$	rozlehlost světa
$R_u = 3$	rádius uspokojení
$R_p = 10$	rádius působení
$n_u = 20$	počet jedinců v oblasti určené R_u potřebných k dosažení uspokojení
$\delta = 25$	maximální hodnota náhodné veličiny
$s = 3$	maximální možný krok jedince v prostoru za jednotku času

Tabulka 4.2.: Standardní parametry modelu

Chování systému pro různé variace je s komentáři ukázáno na obrázcích 4.2 až 4.17. Horizontální osy představují prostorovou proměnnou, vertikální pak časovou. Systém se vyvíjí „odspoda nahoru".

První obrázek (vlevo nahoře) nemá jiný význam než pomocí barev odlišit aktuální počet jedinců v daném bodě prostoru a času. Místa s vyšším počtem jedinců pak přecházejí barevně od modré do červené. Limitním hodnotám (tmavě modrá, tmavě červená) odpovídá výskyt jedinců v množstvích 0 a n_u.

Druhý obrázek (vpravo nahoře) je již statistického charakteru a barevně rozlišuje hodnoty v intervalu $(0, 2n_u)$. Každému bodu byla přidělena barva podle toho, kolik jedinců je pro tento daný bod v oblasti působení ($< r_i - R_p, r_i + R_p >$). Zelená barva přibližně odpovídá počtu n_u a ukazuje na maximální hodnotu výskytu pro udržení stability společenství. Teplejší barvy, žlutou počínaje a tmavě červenou konče, indikují větší výskyt jedinců v potenciální oblasti vlivu a upozorňují na pravděpodobný vznik nestabilit a intenzivních interakcí. Šířky jednotlivých, většinou zelených, barevných pásů zároveň ukazují minimální vzdálenost dvou oddělených populací, pro kterou mohou tyto populace být v dlouhodobém časovém měřítku stabilní.

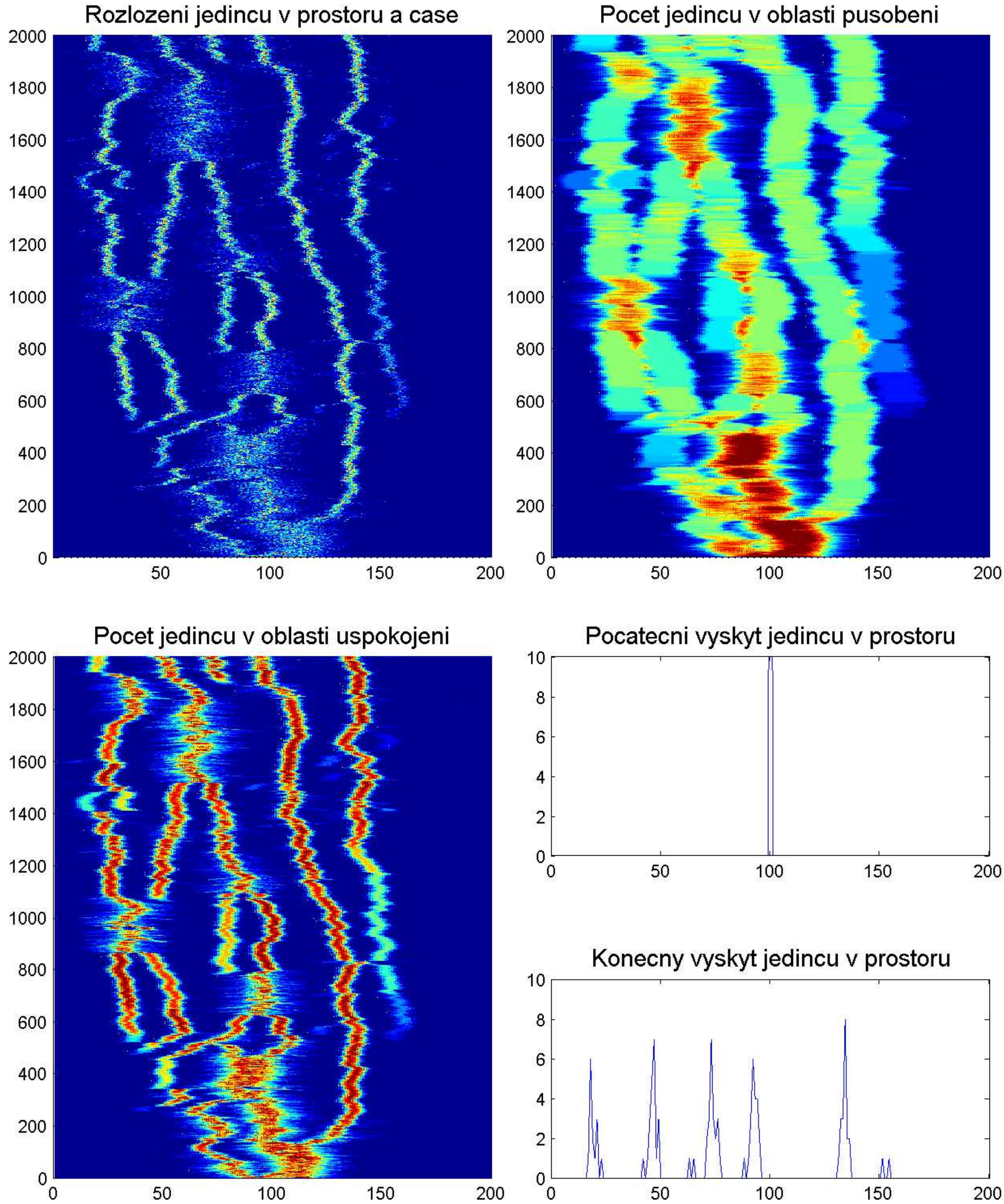
Konečně třetí obrázek (vlevo dole) se od předchozího liší pouze tím, že barevně rozlišuje množství jedinců v oblasti nikoli působení, ale uspokojení (která bývá menší - $< r_i - R_u, r_i + R_u >$). Jsou zde nejlépe patrné vznikající fluktuace a interakce jednotlivých společenství. Je naprosto ideální pro sledování vzniků a rozpadů populací.

Obrázky 4.2 až 4.9 ukazují chování systému pro různé hodnoty počtu jedinců. Například na obrázku 4.8 vidíme jak na počátku byli všichni jedinci na jednom místě, v čase 200 dochází k prvnímu štěpení (jeho vznik lze predikovat, konkrétní okamžik však nikoli). Toto uskupení však stále není stabilní a dochází k přílišnému uspokojování potřeby a k fluktuacím. Přibližně v čase 380 nabývá levá větev stabilního počtu jedinců a nadále zůstává stabilní - což by se změnilo pokud by do ní následkem fluktuace přimigroval nějaký jedinec z pravé části. Pravá větev je stále nestabilní, vznikají paralelní společenství, které se však vlivem náhody opět střetnou s původní větví, až v čase přibližně 680 dochází ke stabilnímu vydělení tří populací s počtem jedinců pod mezí uspokojení. Tento stav bude přetrvávat do té doby, než vlivem náhody dojde opět ke střetu dvou z těchto společenství.

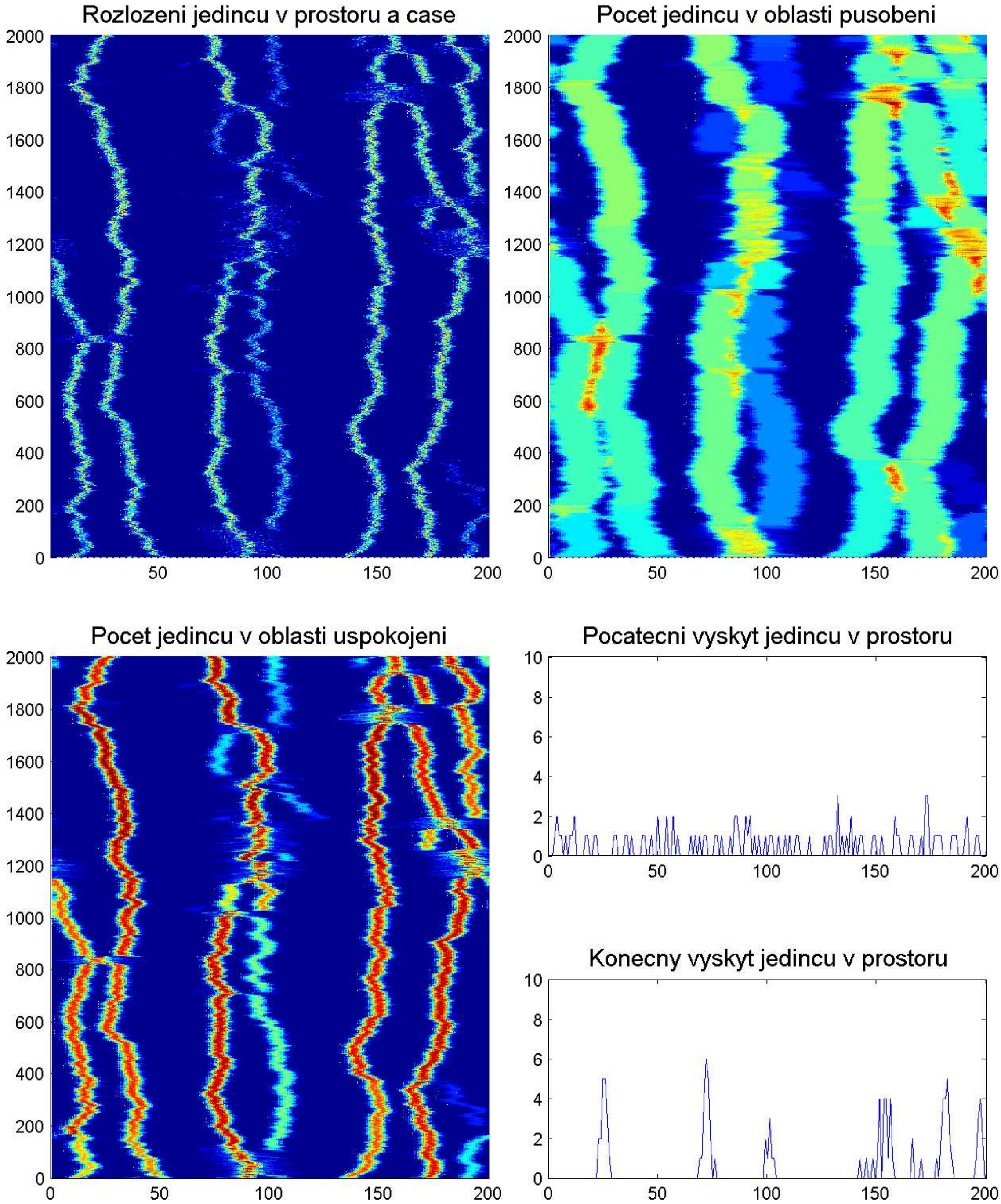
Obrázky 4.10 a 4.11 pak reflektují změnu parametru určujícího hranici uspokojení. Vidíme, že do určité míry vykazují změny v chování celku podobné vlastnosti, jako při změně počtu jedinců. Případy 4.12 a 4.13 pak znázorňují vývoj pro různé dosahy působících potřeb. Obrázek 4.14 pak ukazuje, jak veliká hodnota fluktuace způsobí přenesení nestability jednoho společenství do celého systému namísto spočinutí a rozřešení v malém okolí vzniku této nestability. Případy 4.15 a 4.16 jsou extrémními situacemi daného modelu, kdy je parametr pro krok jedince směrem k uspokojení potřeby nastaven na nesmylnou vysokou či nízkou hodnotu a mění tak chování celku poměrně originálním způsobem[34]. Konečně 4.17 ukazuje, co se stane snížíme-li oblast pro evaluaci uspokojení pod běžnou hodnotu změny pohybu jednotlivců[35].

[34]Jedinci se buď vůbec nepohybují když mají a nebo se naopak pohybují nepředstavitelně intenzivně a nedávají možnost vzniku klasické struktury.

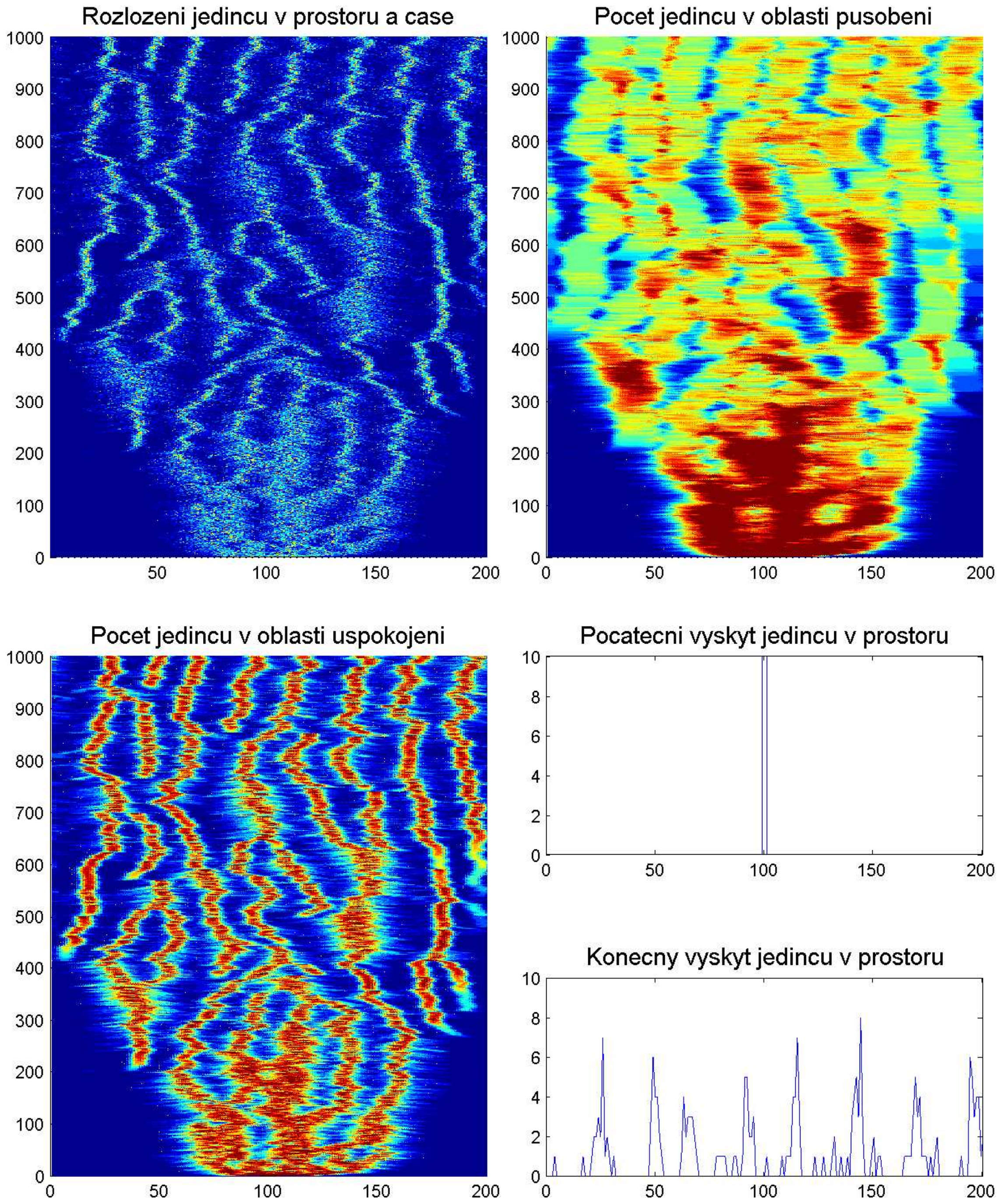
[35]V rámci svého pohybu nejsou schopni se i při nejlepší vůli udržet v daném okolí.



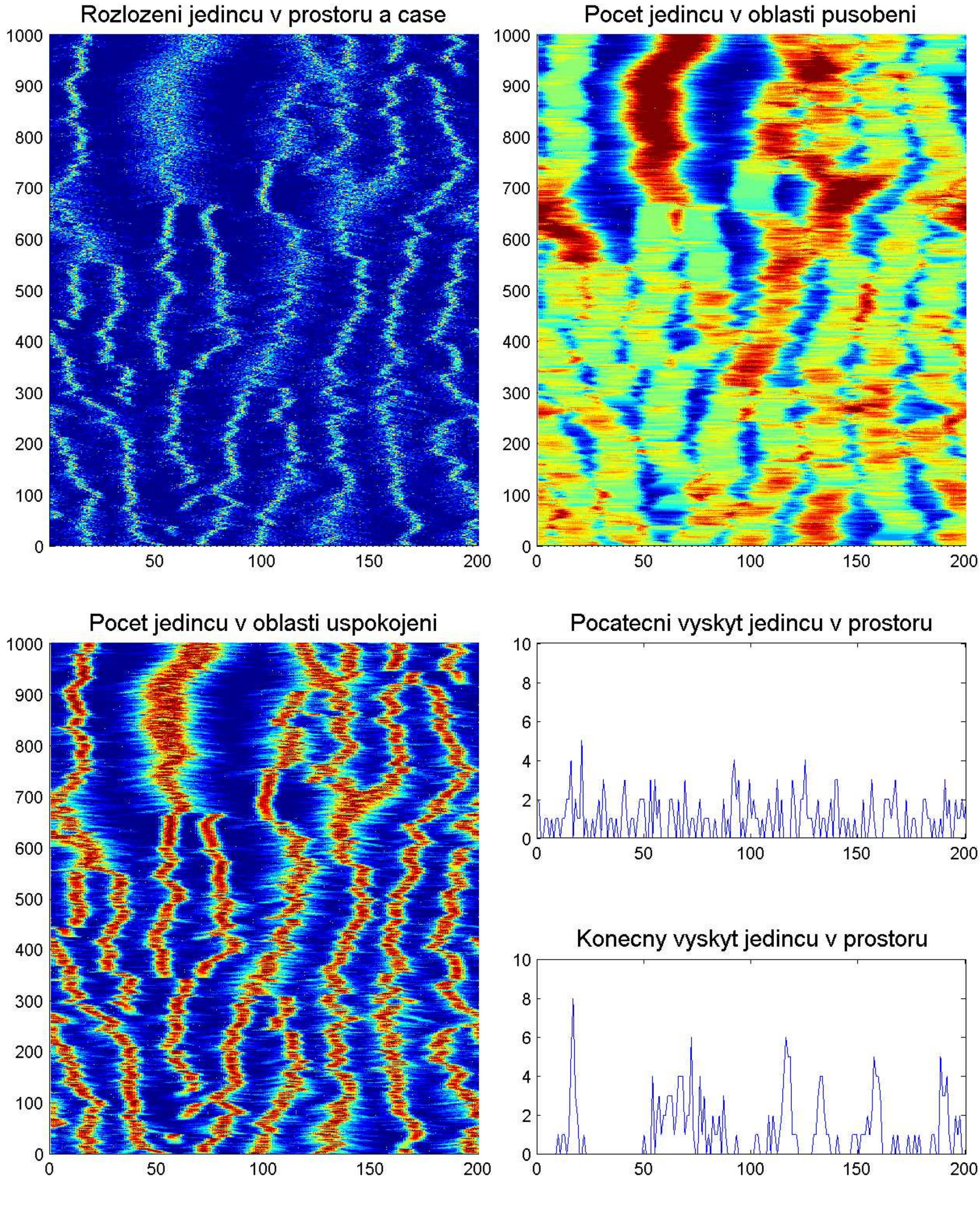
Obrázek 4.2.: $N = 100, M = 200, R_u = 3, R_p = 10, n_u = 20, \delta = 25, s = 3$. Standardní situace. Na počátku jsou všichni jedinci na jednom místě a postupně se rozloží v prostoru ve smyslu tíhnutí k „atraktoru" modelu. Z počátečního dynamického, až chaotického, shluku vzniká postupem času pět až šest stabilních společenství. Jejich vznik však ještě neznamená, že se udrží. Náhodné procesy v celém systému mohou způsobit jejich zánik či přeskupení. Počet těchto oddělených společenství však bude mít tendenci se stabilizovat kolem pěti či šesti - vyplývá z relace celkového počtu jedinců a počtu nutném pro uspokojení a vzniku fluktuace.



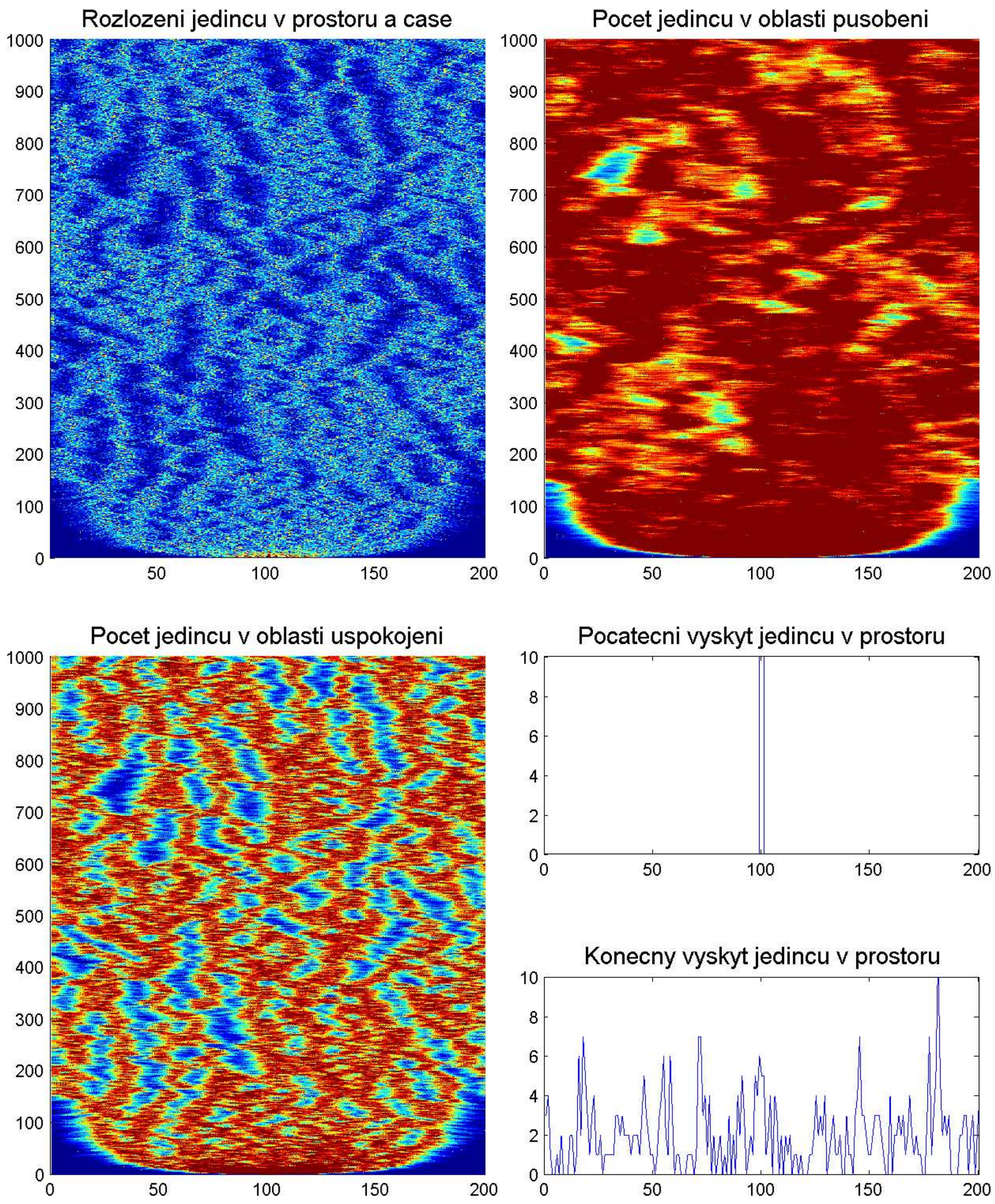
Obrázek 4.3.: $N = 100, M = 200, R_u = 3, R_p = 10, n_u = 20, \delta = 25, s = 3.$ Stejné parametry jako v případě z obr. 4.2 s tím rozdílem, že jedinci byli na počátku rovnoměrně rozděleni v prostoru. Systém velice rychle konverguje ke svému atraktoru - prakticky v několika časových krocích. Vzhledem ke stejným parametrům se průměrný výsledný počet stabilních populací pohybuje opět někde mezi pěti až šesti.



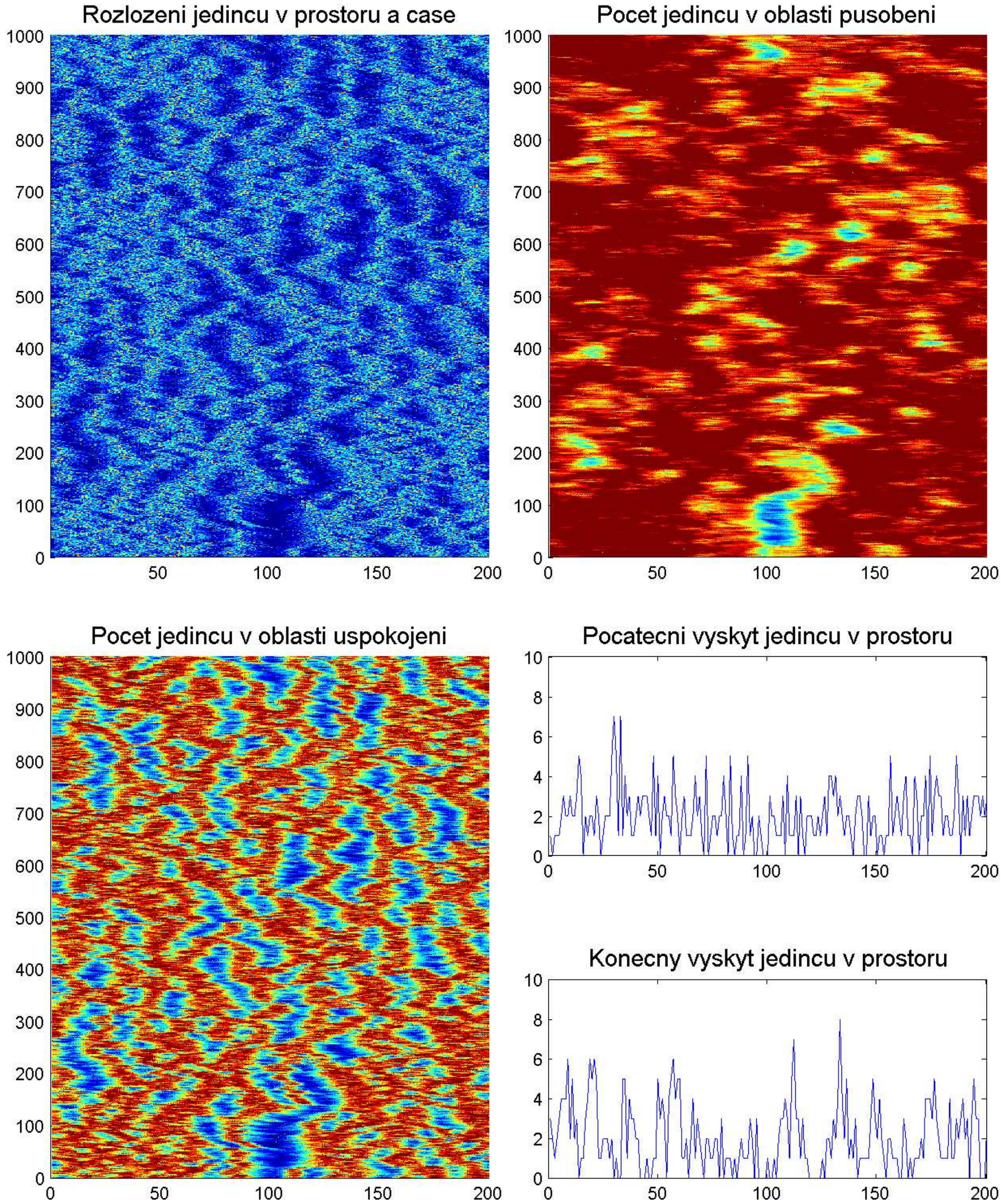
Obrázek 4.4.: $N = 200, M = 200, R_u = 3, R_p = 10, n_u = 20, \delta = 25, s = 3$.
Se zvyšujícím se počtem jedinců se začíná více a více projevovat omezenost prostorem. Průměrná doba trvání jednoho společenství je kratší, častější fluktuace mají větší vliv a migrace jedinců mezi společenstvími v systému zesilují. Strukturotvorné působení potřeby shlukovat se je však stále velice patrné.



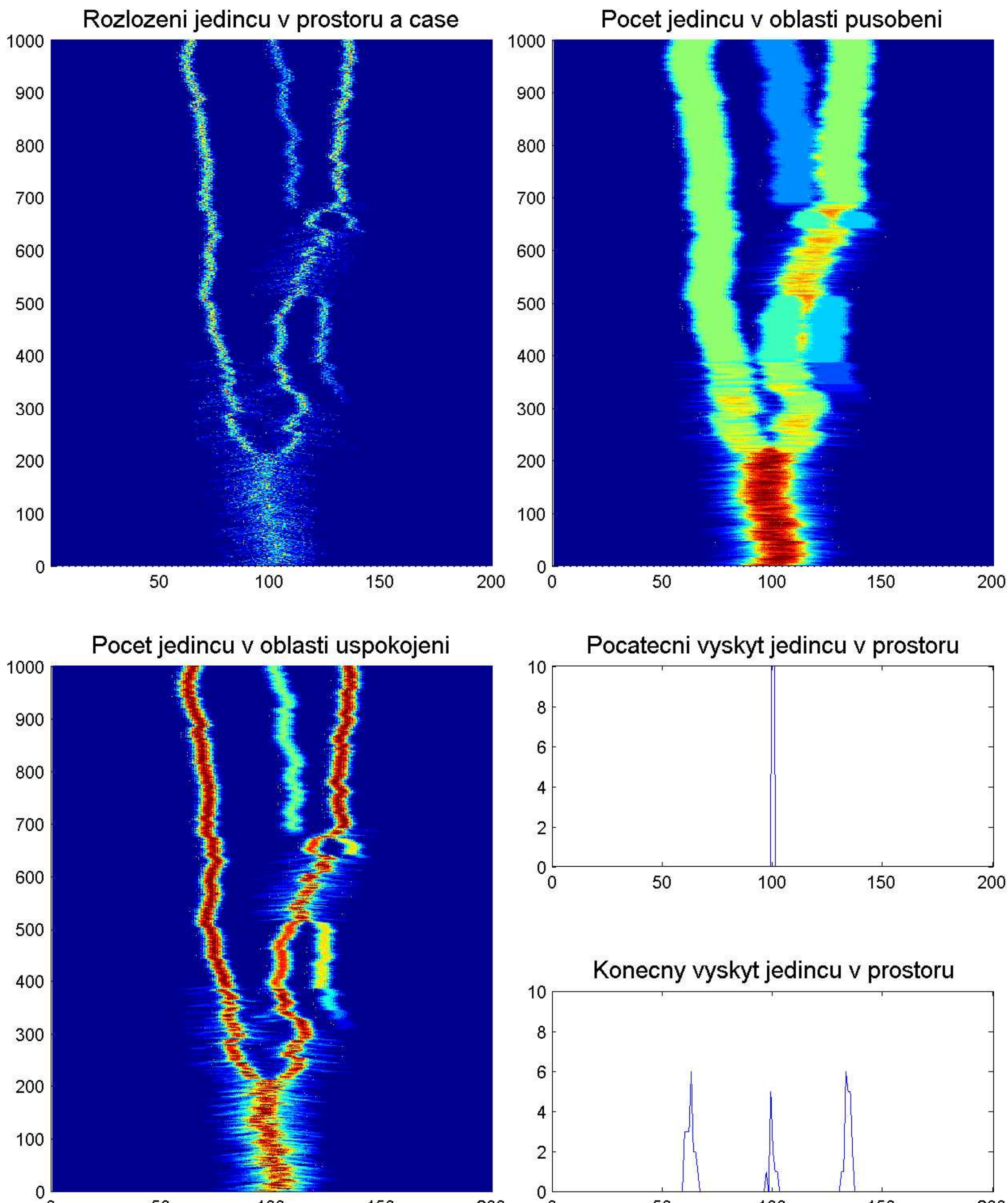
Obrázek 4.5.: $N = 200, M = 200, R_u = 3, R_p = 10, n_u = 20, \delta = 25, s = 3$. Rovnoměrné počáteční rozdělení, jinak stejné jako na obr. 4.4. Jasně vidíme, že stabilní stav již vzhledem k počtu jedinců není dlouhodobě možný a v každém časovém okamžiku bude někde v systému docházet k fluktuacím. I přesto mají potřeby stále rozhodující slovo.



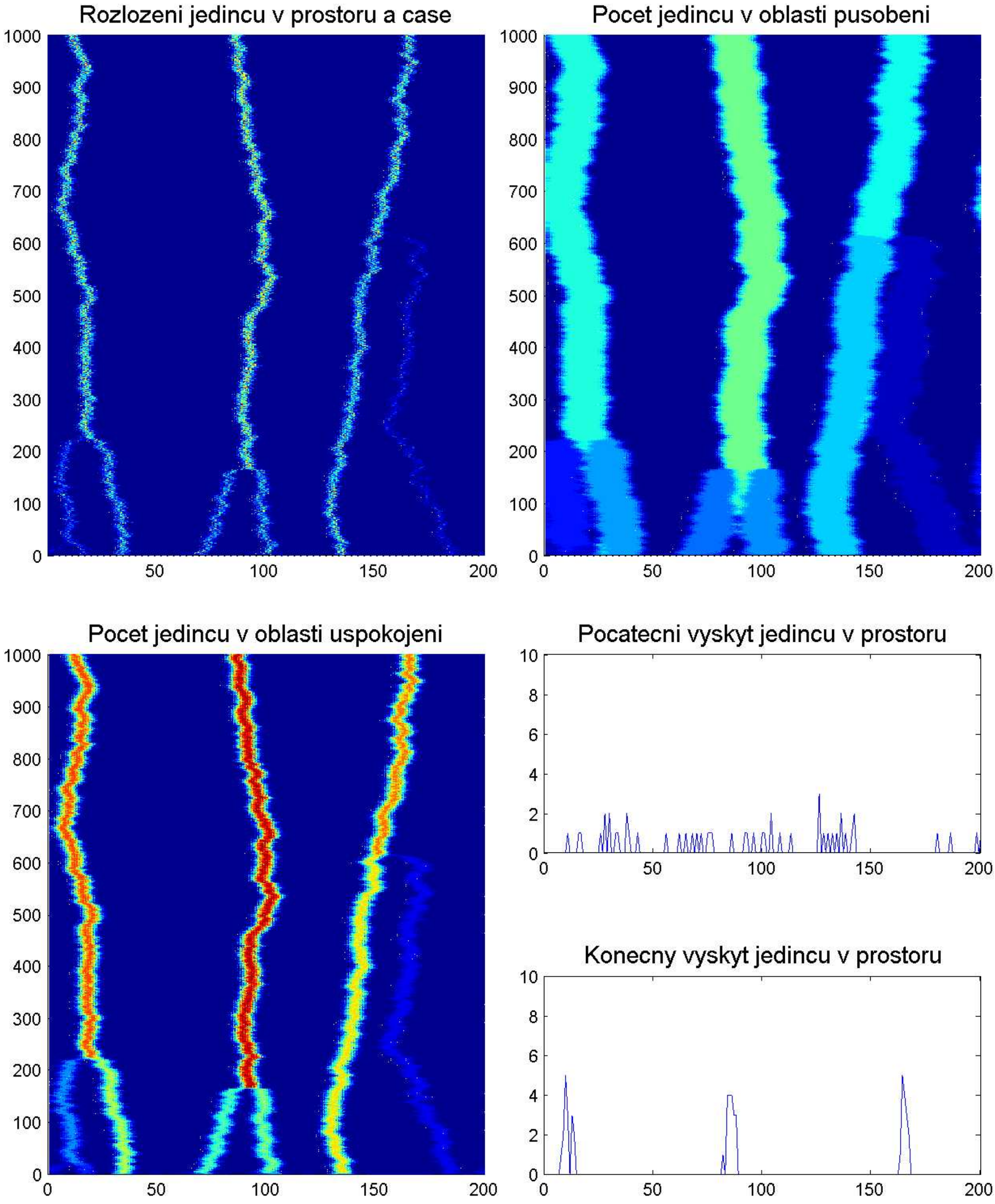
Obrázek 4.6.: $N = 400, M = 200, R_u = 3, R_p = 10, n_u = 20, \delta = 25, s = 3.$
Dále se zvyšující počet jedinců nad kapacitu prostoru, ještě umožňující vznik stabilních populací. Zcela převládá uspokojený stav jedinců a jejich svobodná volba, fluktuace. Potřeba shlukovat se je neustále uspokojena, stav nespokojenosti je méně častý a má velmi krátké trvání.



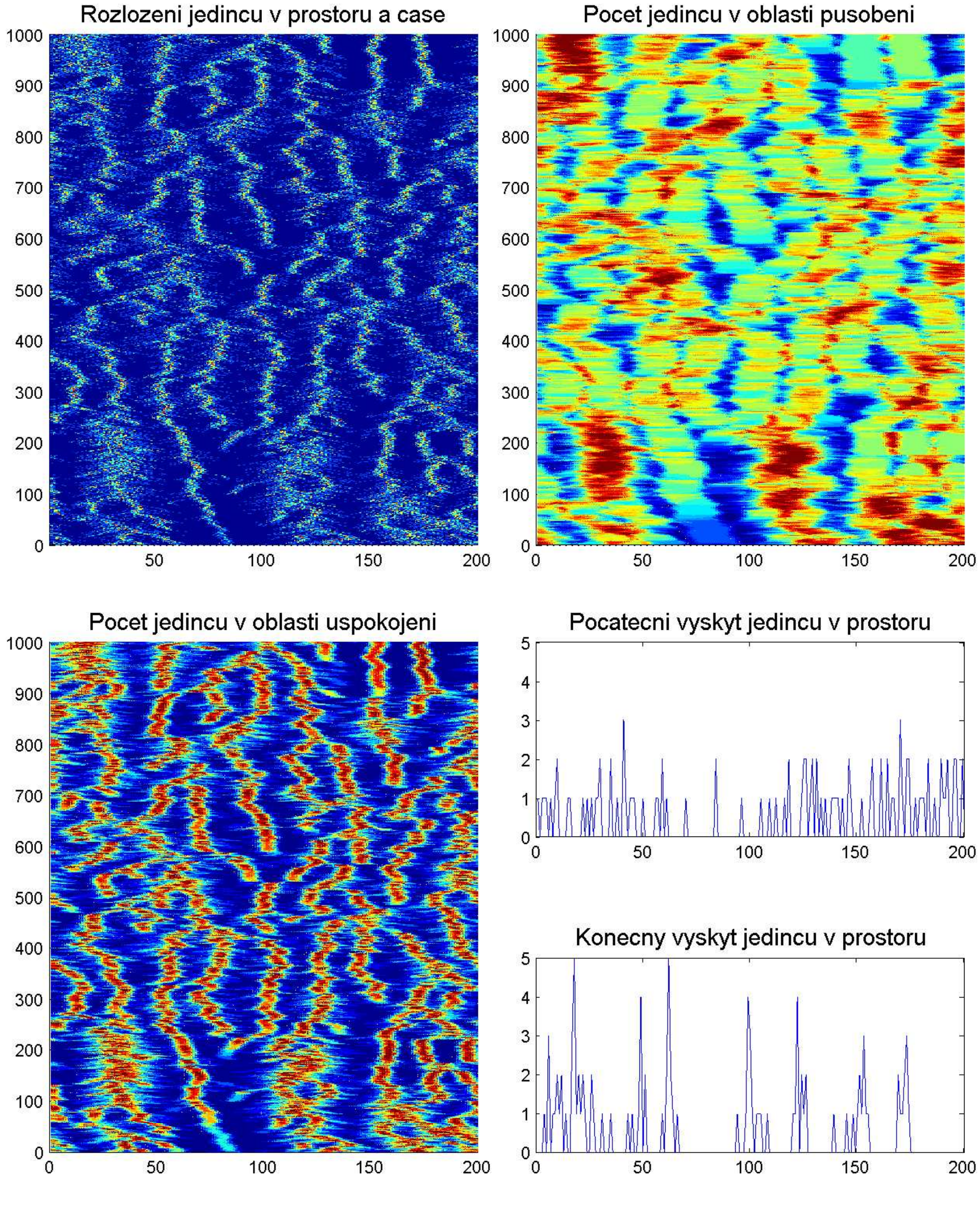
Obrázek 4.7.: $N = 400, M = 200, R_u = 3, R_p = 10, n_u = 20, \delta = 25, s = 3.$
Totéž jako obr. 4.6, rovnoměrné počáteční rozdělení.



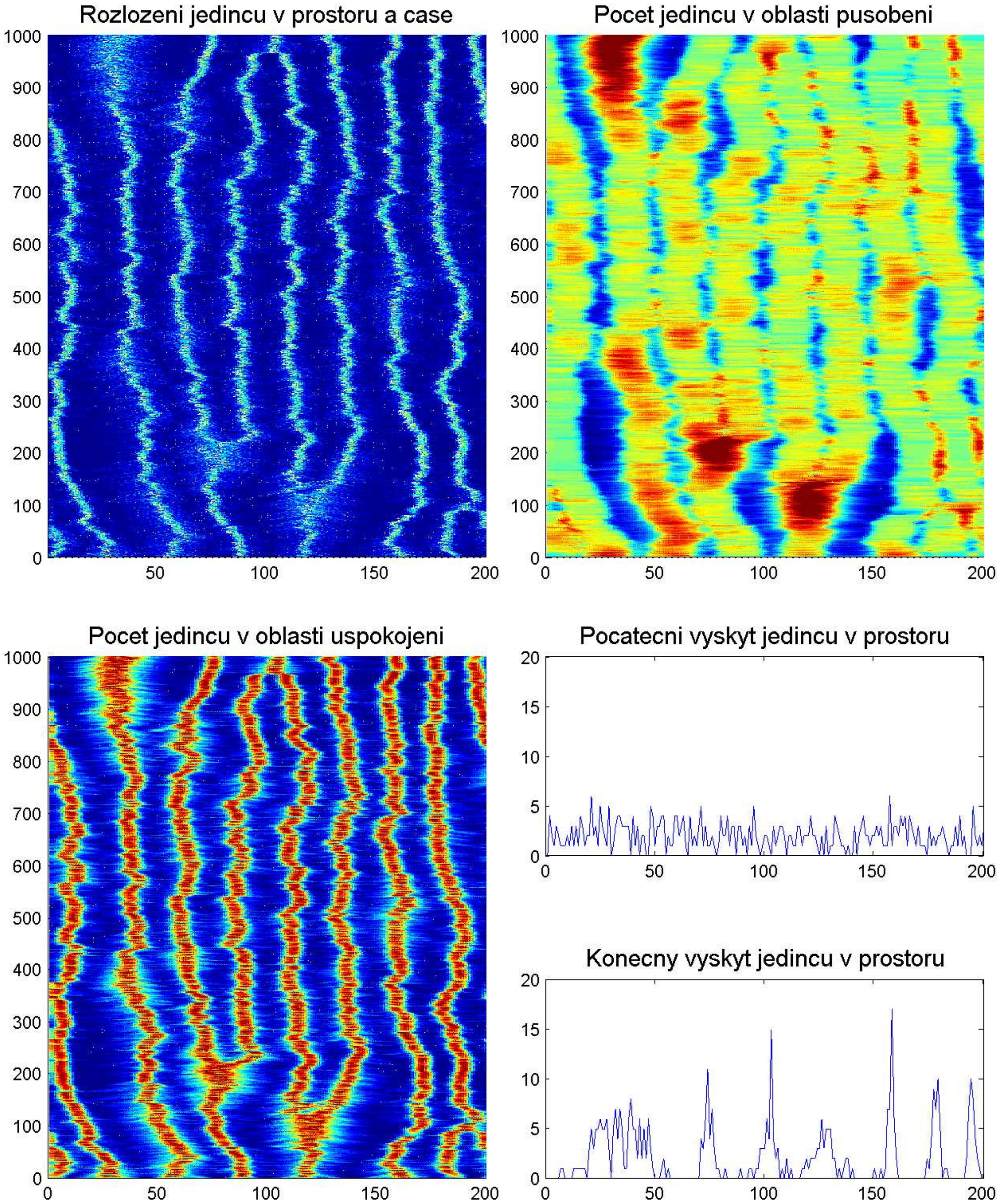
Obrázek 4.8.: $N = 50, M = 200, R_u = 3, R_p = 10, n_u = 20, \delta = 25, s = 3.$
Počet jedinců je zde mnohem nižší, než jaké jsou kapacity světa, průměrná doba stability jednoho odděleného společenství vzrůstá. Každé společenství má k dispozici větší prostor a k vzájemným střetům dochází méně často.



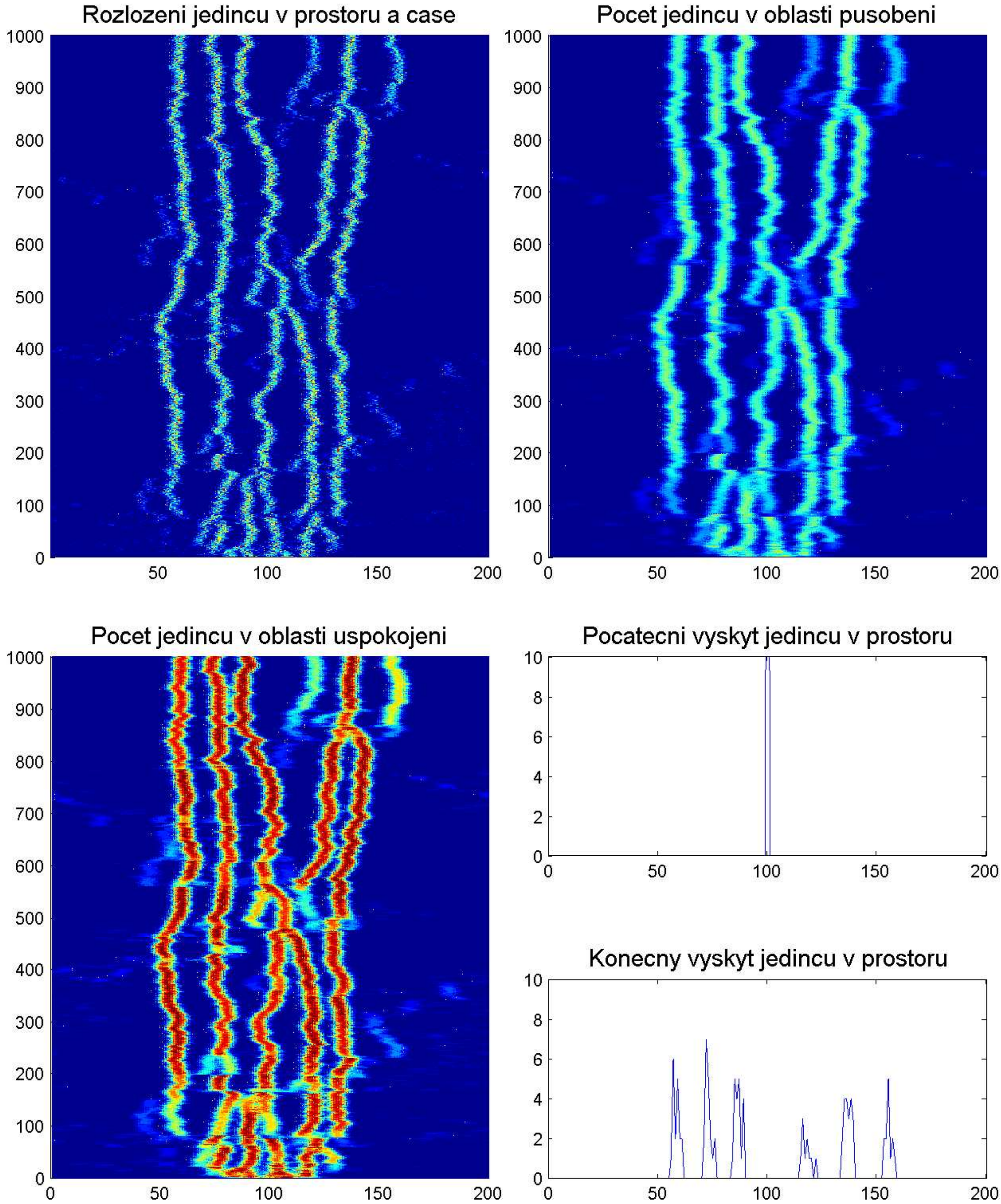
Obrázek 4.9.: $N = 50, M = 200, R_u = 3, R_p = 10, n_u = 20, \delta = 25, s = 3$. Rovnoměrné rozložení na počátku a posléze stabilizace systému rozlišením tří společenství bez velkých fluktuací.



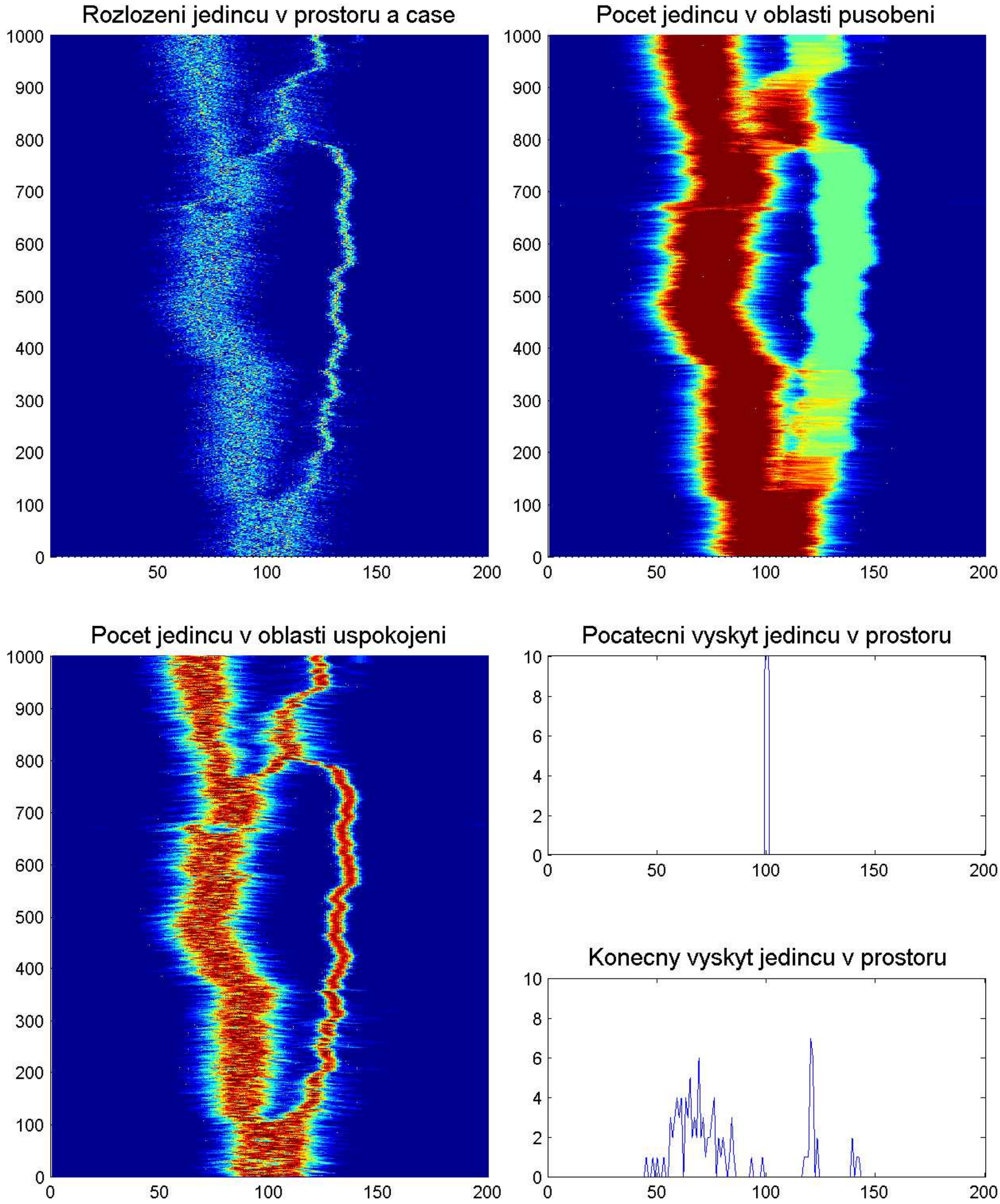
Obrázek 4.10.: $N = 100, M = 200, R_u = 3, R_p = 10, n_u = 10, \delta = 25, s = 3$. Snížení počtu jedinců potřebných pro uspokojení má za důsledek indikuje tendenci vzniku více společenství, rychlejší dosažení meze stability a snížení průměrné doby existence jedné stabilní populace. V důsledku má snížení počtu nutného k uspokojení podobný efekt jako zvýšení počtu jedinců. Rozdíly jsou pouze ve velikosti vlivu náhodných kroků jedinců ve směru uspokojování potřeby, které mají pro populace s menším počtem jedinců statisticky větší význam - náhodná migrace celého shluku je výraznější v případě menšího počtu jedinců v něm soustředěných.



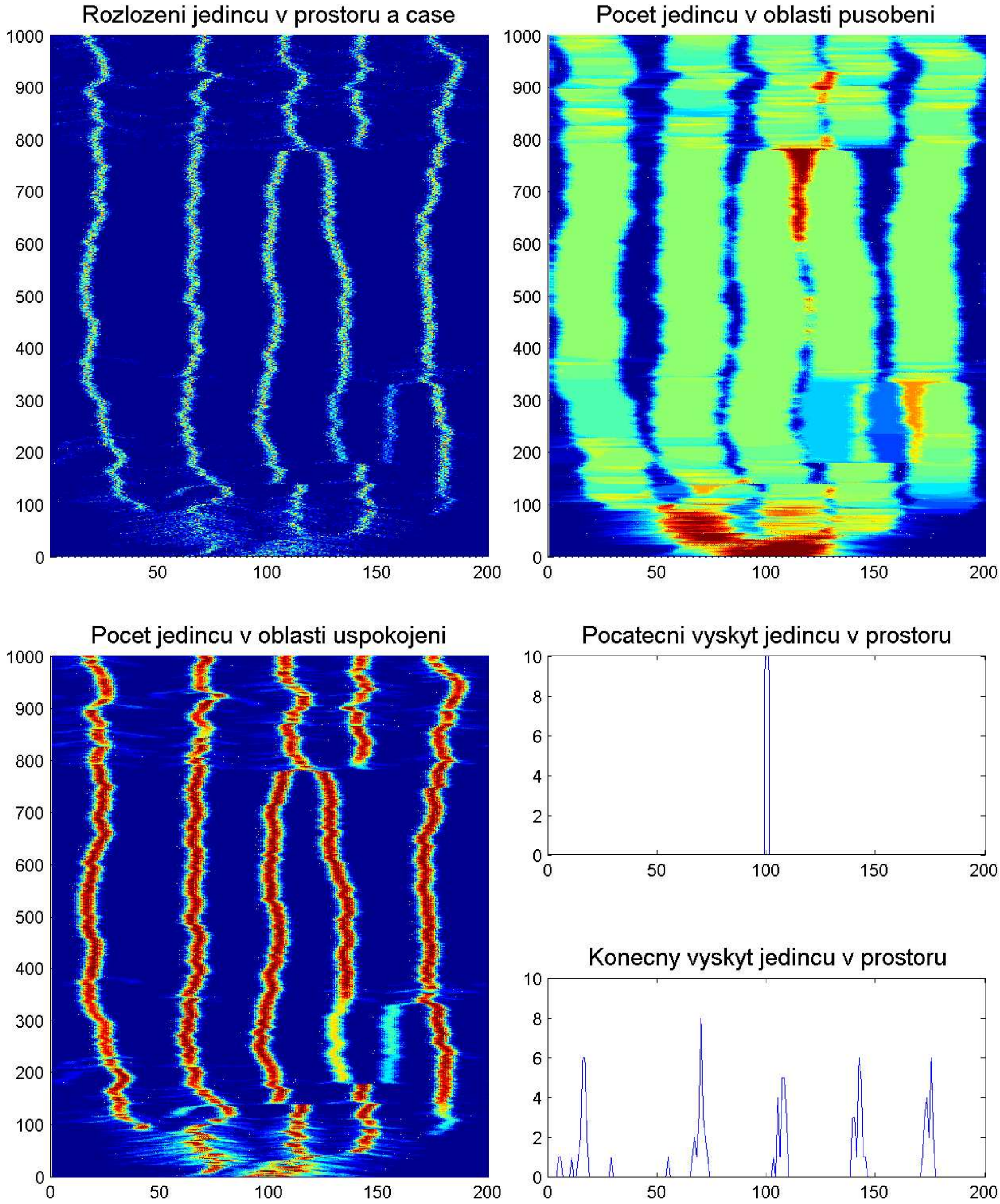
Obrázek 4.11.: $N = 400, M = 200, R_u = 3, R_p = 10, n_u = 40, \delta = 25, s = 3$. Zvýšení počtu nutného k uspokojení a vzniku fluktuace umožní existenci společenství s větším počtem jedinců a důsledkem je pak větší kapacita světa. V porovnání s případem na obrázku 4.7 je patrné, že zvýšením limitů nutných k uspokojení se rovněž sníží náhodné migrace společenství v prostoru a schopnost odolávat „chaosu" a svobodným tendencím.



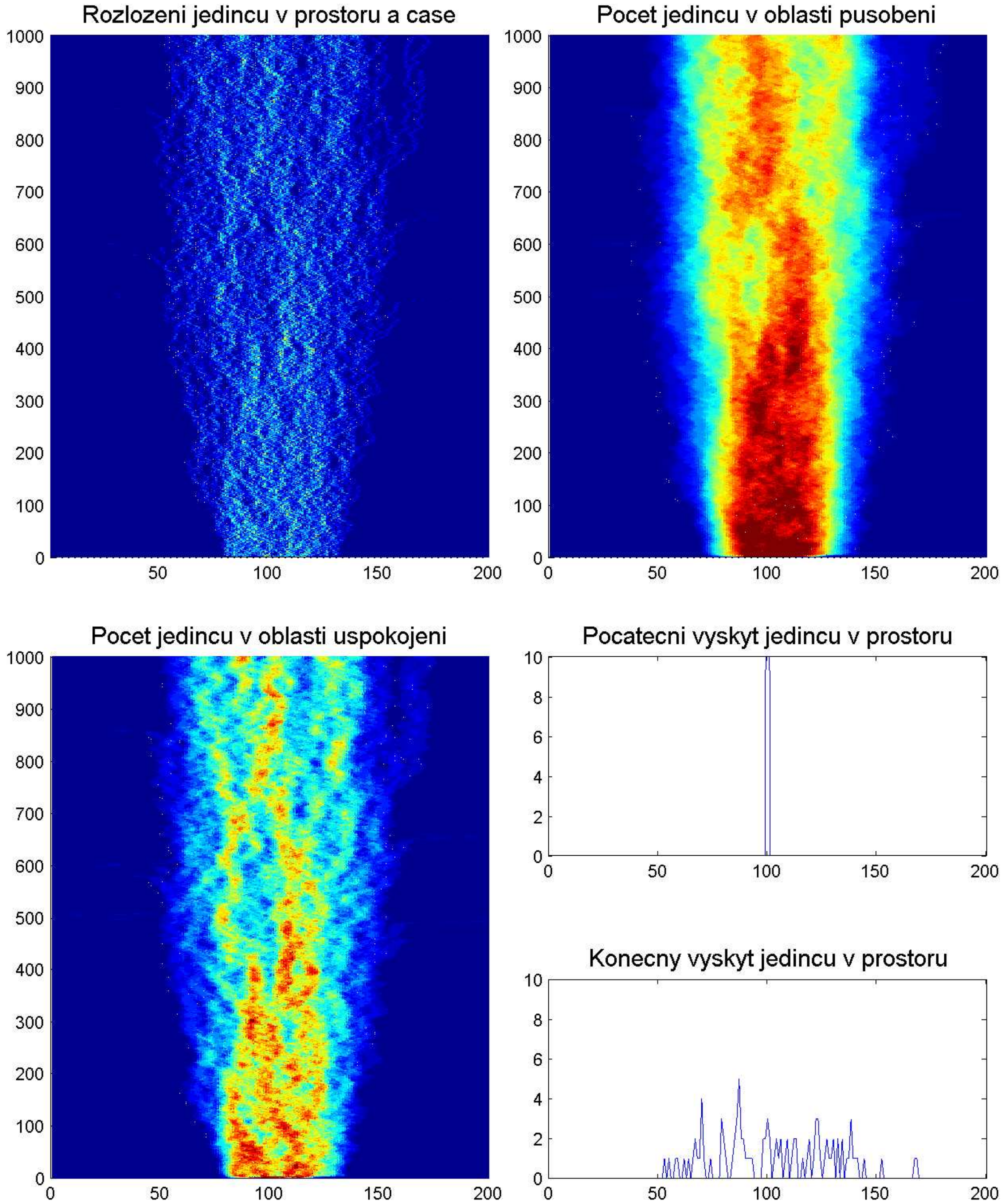
Obrázek 4.12.: $N = 100, M = 200, R_u = 3, R_p = 3, n_u = 20, \delta = 25, s = 3$. Snížení poloměru dosahu vnímání jedinců má za následek oslabení mezipopulačních interakcí - populace mohou existovat stabilně mnohem blíže u sebe. Zároveň se však také snižuje schopnost populace udržet si jedince v okamžiku kdy začne docházet k fluktuacím a jedinci sami o sobě ztrácí „přehled” o světě a rozhodují se jen na základě nejbližších faktorů. Pro jedince je také v okamžiku uspokojení mnohem snazší dané společenství opustit.



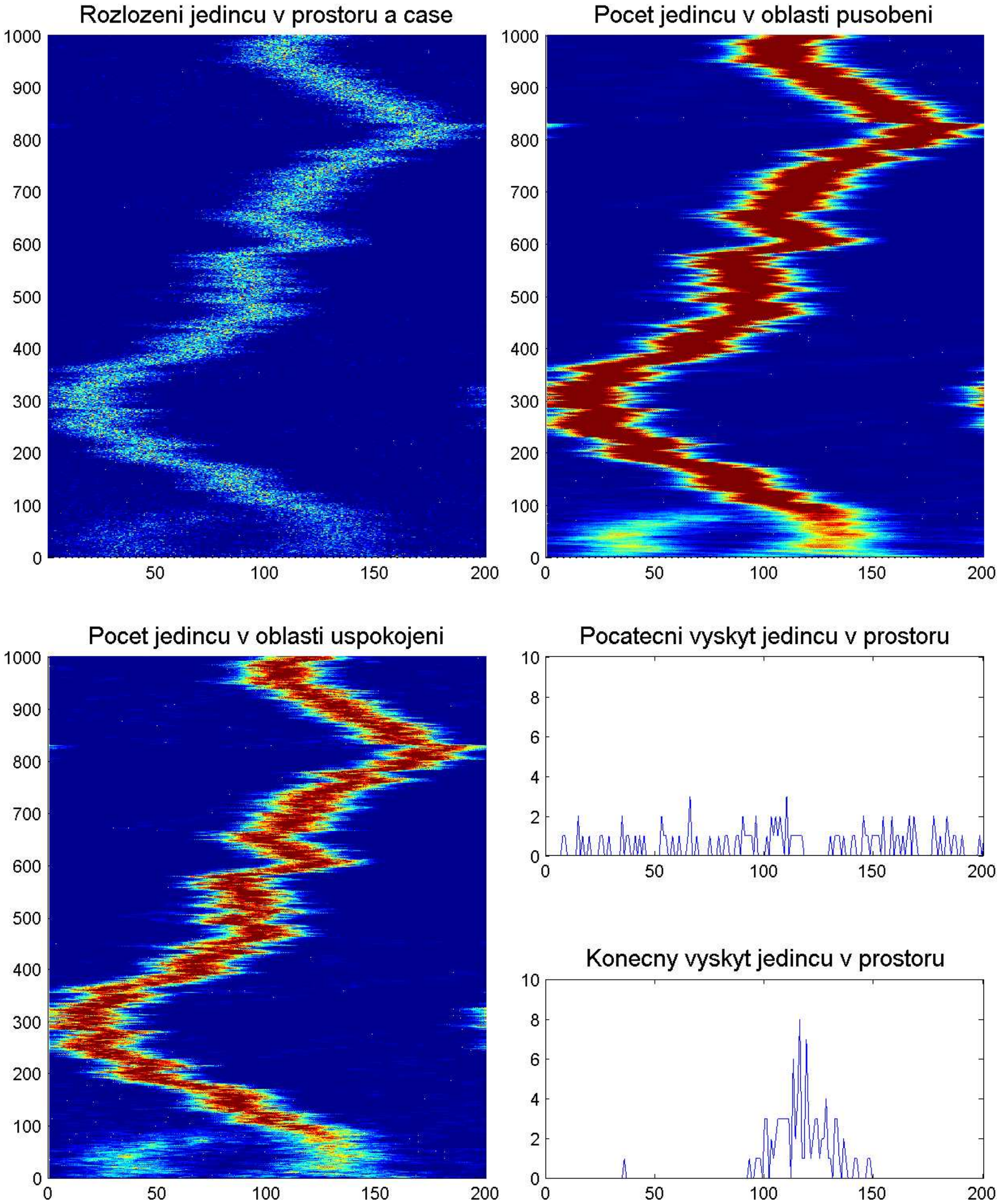
Obrázek 4.13.: $N = 100, M = 200, R_u = 3, R_p = 13, n_u = 20, \delta = 25, s = 3.$ Zvýšení dosahu vnímání jedinců má za důsledek mnohem menší tendenci rozštěpení společnosti i přesto, že v ní dochází k častému či permanentnímu uspokojování potřeby a svobodným rozhodnutím. Velký dosah vnímání působí na chování jedince poté, co spokojen společnost opustí. V okamžiku kdy již spokojen není, vnímá v dáli velké množství jedinců, které usměrní jeho pohyb zpět k fluktuujícímu společenství. V okamžiku, kdy by oblast vnímání byla větší než maximální možná fluktuace jako taková, pak by k rozštěpení společnosti nemohlo dojít již nikdy.



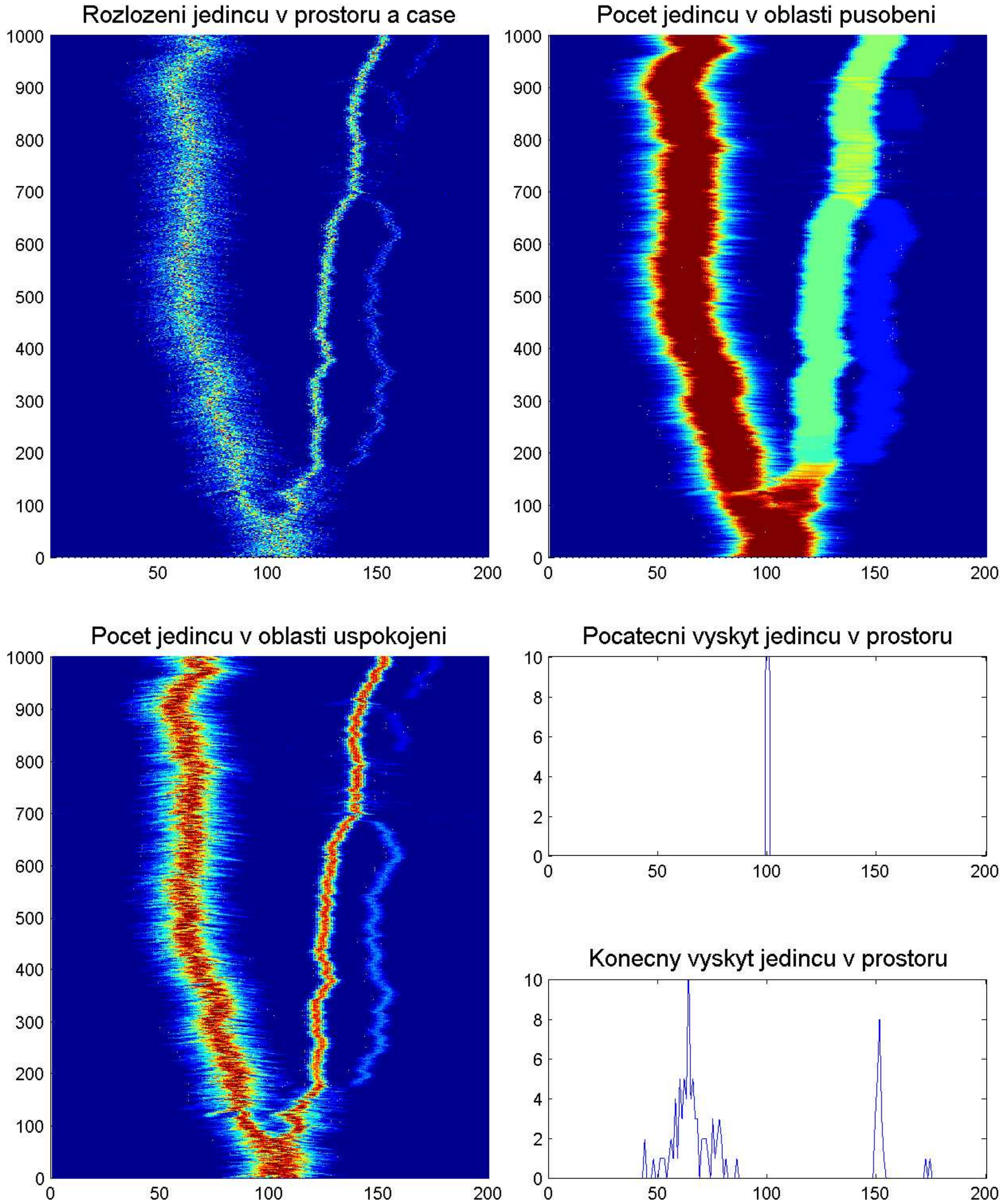
Obrázek 4.14.: $N = 100, M = 200, R_u = 3, R_p = 15, n_u = 20, \delta = 50, s = 3.$ Velká hodnota fluktuace a zároveň velký dosah vnímání jednotlivců se vyznačuje rychlou konvergencí ke stabilní struktuře. Velmi zajímavý je okamžik v čase kolem 800. V tu chvíli došlo ke spojení svou společenství a vniku nového. Velké provázející fluktuace měly za následek migraci malého množství jedinců po celém prostoru, nikoli jen v malém okolí původního střetu dvou společenství. Vznik lokální nestability se projevil v globálním měřítku.



Obrázek 4.15.: $N = 100, M = 200, R_u = 3, R_p = 15, n_u = 20, \delta = 25, s = 0.$
Zde byl maximální možný krok jedince v případě působící potřeby nastaven jako nulový. Pokud cítí jedinci potřebu se shluknout, nedělají nic. Jinými slovy, jedinci se pohybují pouze zcela náhodně ovlivněni minimální fluktuací nebo v případě uspokojení mohou po svobodném rozhodnutí změnit svou polohu dle klasické fluktuace určené parametrem δ.



Obrázek 4.16.: $N = 100, M = 200, R_u = 3, R_p = 10, n_u = 20, \delta = 25, s = 30.$ Poměrně překvapivý výsledek dostaneme, pokud v okamžiku působení potřeby bude krok jedince za jejím uspokojením nabývat nepřiměřeně velkých hodnot. Celé společenství se tak stane jednou velikou fluktuující grupou, která nejeví tendence se dále jakkoli vydělovat. Klasické fluktuace sice mají schopnost jedince od společenství odtrhnout, okamžik vzniku potřeby však velkými kroky opět způsobí extrémně rychlé putování jedince světem a jeho brzké vtažení zpět do jednotné masy.



Obrázek 4.17.: $N = 100, M = 200, R_u = 2, R_p = 10, n_u = 20, \delta = 25, s = 3$. Zmenšení oblasti uvažované pro uspokojení komunitní potřeby povede k řidšímu nastávání uspokojivých stavů a následně k pomalejšímu dělení na jednotlivé stabilní větve. Jinak řečeno, četnost fluktuací je nižší a hůře nastávají situace, během kterých dojde k vydělení většího množství jedinců daleko od původního společenství, tak aby došlo k založení nové, stabilní větve. Místo toho většinou nastane pohlcení jedinců zpět k hlavní větvi - viz podobné tendence na obrázku 4.13.

4.2.4. Výsledky modelu

Přestože se jedná o nedeterministický model, z analýzy výstupů je patrná tendence příklonu k určitému schématu chování v závislosti na nastavených parametrech. Díky náhodnosti nejsme schopni určit, *jaký bude* konkrétní stav v daném čase, nicméně jsme schopni říci, jakou bude mít tento stav *tendenci být*.

Takto je patrné, že počet společenství, která se budou mít tendenci utvářet bude

$$n = \frac{N}{n_u}, \tag{4.27}$$

podobně tak počet stabilních společenství, které se do modelovaného světa budou mít možnost vměstnat bude

$$n_s = \frac{M}{2R_p}. \tag{4.28}$$

Systém se pak bude mít možnost rozumně stabilizovat pouze v případě, že $n < n_s$, neboli

$$N < \frac{n_u M}{2R_p}. \tag{4.29}$$

Podobně jednoduchá podmínka platí pro vůbec jen potenciální možnost toho, aby vznikla nějaká druhotná struktura - rozštěpení společnosti. K tomu, aby mohlo docházet k vzniku více společenství musí platit

$$\delta > R_p. \tag{4.30}$$

Tato podmínka je téměř zásadní. Při náhodném výběru velikosti fluktuace[36] pak přihodnotách $R_p > \frac{1}{2}\delta$ rychlost tvorby druhotných společenstev vydělených z původního velice rychle klesá. Až do okamžiku kdy je již $\delta \leq R_p$ sice stále existuje pro jedince možnost se ze společenství vydělit, avšak pro založení separátního potřebuje minimálně ještě dalšího s sebou. Proto se při nárůstu R_p většinou stává, že jedinec, který společenství opustí, je do něj opět záhy vtažen zpět, fluktuace přetrvávají, ale nedochází ke vzniku nové společnosti, protože frekvence opouštění tohoto společenství jednotlivými jedinci je příliš malá.

Model se jako celek choval podle očekávání. Myslíme si, že poměrně hezky ukázal vliv náhody a fluktuací na vznik nových struktur. V konkrétním modelovaném systému dále docházelo k několika velmi zajímavým úkazům:

- Počty jedinců ve společenství mají tendenci se udržovat na maximálních možných stabilních hodnotách. Jejich populace se ustálí těsně pod kritickou mezí za níž dochází ke vzniku strukturu narušujících fluktuací. Velmi pravděpodobně se jedná o další jev, který spadá do kategorie určené termínem *samoorganizované kritično*[37].

[36] Námi vybrané rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny odpovídalo rozdílu dvou rovnoměrných rozdělení.

[37] Podobným jevem jsou například dopravní zácpy [4]. Zácpa vzniká v okamžiku přesažení kritické hustoty aut. Vzniká nová struktura, která se vyznačuje samoudržováním a pohybem proti směru „toku" automobilů. Zároveň tato struktura udržuje mezi dvěma konci silnice, na kterých již zácpa není, maximální možný tok vozů. Dopravní zácpa je také v souladu s pojmem *samoorganizované kritično*, protože se

- Velké hodnoty nezávislých fluktuací v důsledku brání diverzifikaci společenství a výrazně zvyšují celistvost přelidněného společenství i navzdory „separatistickým” tendencím.
- Velké hodnoty podmíněné fluktuace přenáší projevy lokální nestability do globálního rozměru s tím, že dopad v lokální oblasti není tak výrazný.

Tolik v hrubém náhledu jednoduchý model společenství s jednou potřebou.

4.3. Shrnutí

V této kapitole byl představen pokus o formulaci konceptu, který by umožnil modelovat dění v nefyzikálních, převážně pak v sociálních, systémech. V první části jsme začali v obecné rovině a popsali motivaci a princip tvorby numerických modelů ve složitějších systémech.

V druhé části byl pak ukázán konkrétní přístup k formulaci modelů, jejichž velká principiální složitost byla příčinou k zahrnutí náhodných veličin a jejich relací do modelů samotných. Tyto modely mohou být jedním ze základů pro vytváření mostů mezi kvantitativním světem, exaktně popsaném fyzikou a chemií, a světem kvalitativním, neurčitým, magickým, kterým se zabývají biologie či sociologie. Následná prezentace modelu společenství s jednou potřebou nastínila, že reálná existence mostu mezi kvantitou a kvalitou je v principu možná. Za nejdůležidější aspekt uvedeného přístupu považujeme prezentovanou možnost kombinace deterministických a nedetermnistických vlivů v jednom modelu.

jedná o systém, který samovolně udržuje určité parametry na jejich kritické mezi.

5. Závěr

Práce je zaměřena na přiblížení problematiky spontánního vzniku struktur a jeho modelování ve fyzikálních, chemických, biologických a sociálních systémech. O tuto problematiku je v poslední době stále vzrůstající zájem, což je mimo jiné také důsledkem rostoucích výpočetních kapacit, které umožňují i řešení a simulaci složitých nelineárních systémů, popřípadě numerické modelování systémů s velkým množstvím objektů.

V druhé kapitole jsou shrnuty základní poznatky klasické a moderní termodynamiky. Ve většině případů jsme se pokoušeli uvést více než jen jeden pohled na danou problematiku. Přes různé formulace *termodynamických vět* jsme se dostali k pojmům jako *entropie,* či *šipka času*, které mají přímou vazbu na vesměs všechny teorie týkající se fenoménu nevratnosti a vzniku nových kvalit v přírodě. Dále jsme pojednali o dvou různých přístupech k vysvětlení nárůstu entropie a nevratnosti ve fyzikálních systémech. Jako jeden z přístupů jsme uvedli klasický *Boltzmannův statistický model*, který vysvětluje nevratnost a nárůst entropie jako důsledek tendence systémů uspořádávat se co nejpravděpodobnějším způsobem. Jako jiný přístup jsme prezentovali *Prigoginův koncept*, spočívající v nalezení deterministické transformace, která při aplikaci na systém do něj zavádí jakési „vnitřní stáří". V kombinaci s analýzou možných a vyloučením nemožných počátečních podmínek (stavů systému) pak tato transformace jednoznačně určuje směr vývoje systému v čase. Jako jednu z možných transformací, splňující požadované podmínky, jsme ukázali tzv. *Pekařskou transformaci* (vztahy 2.19 a 2.20), která umožňuje tento koncept matematicky vyjádřit.

Třetí kapitola je věnována analýze tří synergetických modelů:

- *Brusselator*: Historicky první model oscilativní chemické reakce (3.1). V závislosti na nastavených parametrech může systém spočívat buď ve stabilním stacionárním stavu (obr. 3.2 a 3.3), nebo v okamžiku neudržitelnosti stability těchto stacionárních stavů přejít do oscilativního módu, ve kterém koncentrace katalyzátorů reakce vykazují periodické změny (obr. 3.1 a 3.4). Důležitým aspektem modelu je též možnost pomocí vhodné volby parametrů téměř linearizovat průběhy jednotlivých koncentrací až na výjimku prudkých, periodicky se opakujících změn mezi jednotlivými cykly (obr. 3.5, 3.6 a 3.7).

- *Roesslerův oscilátor*: Systém tří nelineárních diferenciálních rovnic (3.5), jejichž řešení je vysoce citlivé na počáteční podmínky. Pro libovolné počáteční podmínky spadající do specifické „stabilní" oblasti se systém po zcela nepředvídatelné trajektorii (různý počet cyklů, různá rychlost konvergence) blíží k atraktoru (obr. 3.8, 3.9 a 3.10). Pro zvolené počáteční podmínky mimo specifickou oblast dochází k exponenciální divergenci systému a vzniku netlumených oscilací (obr. 3.12, 3.13).

- *Systém dravec - kořist*: Jednoduchý antagonistický model popsaný Volterrovými-Lotkovými rovnicemi (3.6) se ukázal jako nedostatečný - připouští pouze jeden typ řešení (oscilace), umožňuje nekonečné množení kořisti a naopak vylučuje vyhynutí dravce. Po úpravě modelu jsme získali přesnější popis populačních závislostí, který omezuje množivost kořisti a koriguje její množství lovené dravcem v případě, kdy je kořisti mnohem více než dravec potřebuje (3.7). V závislosti na nastavených parametrech pak tento model umožňuje tři scénáře - stabilní stacionární stav, kdy populace dravce i kořisti se ustálí na nenulových hodnotách (obr. 3.17), dále pak stabilní stacionární stav, kdy dravec vyhyne a populace kořisti se ustálí na svém maximu (obr. 3.18, 3.19) a konečně případ, kdy obě populace vzájemně oscilují (obr. 3.20, 3.21, 3.22 a 3.23). Důležitým poznatkem též je, že systém je možno přinutit ke všem modům chování pouze při manipulaci s libovolným z jeho parametrů.

Ve čtvrté kapitole jsme pak formulovali možný obecnější způsob modelování složitějších systémů, jakými jsou například sociální společenství (strana 40). Základním předpokladem bylo, že jednotliví členové společenství, kteří jsou v modelu elementárními prvky, se budou chovat (pohybovat) ve smyslu uspokojení potřeb, zároveň však budou ovlivněni mnoha nám neznámými vlivy, které ve formě náhodné veličiny dále ovlivňují jejich výsledné chování (pohyb).

Pro společenství s jednou potřebou jsme pak formulovali jednorozměrný diskrétní numerický model (strana 47). Chování jedinců sledovaného společenství bylo nastaveno takovým způsobem, aby každý jednotlivec cítil potřebu „komunitního soužití" a v rámci jejího uspokojení se pohyboval směrem k většímu množství ostatních jedinců, kteří jsou v dosahu jeho vnímání. V okamžiku, kdy je tato potřeba uspokojena, čili v určeném okolí je dostatečný výskyt ostatních jedinců, může jedinec vykonat náhodnou veličinou simulované *svobodné rozhodnutí* a přesunout se dle libosti kterýmkoli směrem. Takto formulované společenství se pak v závislosti na nastavených parametrech v modelu chovalo rozličnými způsoby:

- *Vznik oddělených lokalizovaných populací s počtěm jedinců na hranici uspokojení potřeby* - nutný dostatečně velký prostor (svět) pro rozmístění jednotlivých oddělených populací, větší množství jedinců potřebných k uspokojení potřeby (ovlivňuje počet jedinců v populaci) a dostatečně malý dosah vnímání jedinců v porovnání z rozměrem světa (obr. 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.8, 4.9).

- *Chaotické, nestrukturované chování* - projevuje se v okamžiku kdy jedinců je v prostoru příliš mnoho na to, aby se u více z nich mohla společně projevit potřeba komunitního soužití, která následně vytvoří shluk. Místo toho je velké množství jedinců neustále spokojeno a chovají se chaoticky, nezávisle, jakoby bez pravidel (obr. 4.6, 4.7). Podobný případ dostáváme, jestliže počet jedinců nutný k uspokojení jejich potřeby je velmi nízký (obr. 4.10).

- *Chaotické strukturované chování* - dochází k němu v okamžiku kdy jedinci jsou uspokojeni a snaží se společenství opustit, avšak nedokáží překonat bariéru určenou například velkým dosahem vnímání (potřeba působí na velkou vzdálenost) nebo jejich pohyb směrem k uspokojení má větší prostorový dopad (příliš velký krok) než dosah jejich vnímání. Společnost má pak tendenci fungovat jako jeden fluktuující shluk (obr. 4.13, 4.16, 4.17).

Chování jedinců se mezi uvedenými hlavními scénáři mění plynule v závislosti na nastavených parametrech (např. obr. 4.10, 4.13). Důležitou roli zde hraje právě náhoda a náhodný efekt. Společenství, ve kterých je tento náhodný prvek více „pod kontrolou" (čili běžné chování je převážně určeno potřebami jedince a intenzivní náhodná veličina se projeví až za specifických podmínek), vytváří různý počet stabilních, oddělených populací, které v případě vzniku nestability opět konvergují do stabilního rozložení. Rychlost konvergence roste s náhodnou veličinou, projevující se v okamžiku uspokojení. Naopak růst nezávislé náhodné složky má rozkladný efekt směřující systém k chaosu.

Nejdůležitějším aspektem námi prezentovaného přístupu je myšlenka současné kombinace deterministických a nedeterministických vlivů v rámci jednoho matematického modelu. Při aplikaci na sociální systém je pak možno pomocí náhodné veličiny modelovat *svobodné rozhodnutí* jeho jednotlivých členů. Toto svobodné rozhodnutí se vyznačuje tím, že je zcela nezávislé na působících potřebách či silách, jejichž důsledky podléhají deterministickým závislostem. Pokusili jsme se také ukázat, za jakých podmínek může být svobodné rozhodnutí příčinou vzniku nových struktur, k jejichž dalšímu udržení je však nutná opět nějaká potřeba (či více potřeb).

Námi vytvořený koncept byl aplikován na fiktivní společenství jedinců s jednou potřebou. Vzhledem k jeho obecné formě je však možné použít podobných metod k simulaci společenství s více potřebami. Mezi možné další konkrétní aplikace mohou patřit populační modely v biologii, ve kterých bude cílem simulovat pohyby a rozložení jednotlivých druhů v prostoru, nebo například analýzy chování a stablity sociálních společenství v rámci změny specifických parametrů. Doufáme tedy, že uvedený přístup bude přínosem pro budoucí modelování komplexních a nedeterministických systémů.

Literatura

[1] Dilip Kondepudi, Ilya Prigogine, *Modern Thermodynamics*, Wiley & Sons, 1999

[2] Ilya Prigogine, Isabelle Stengersová, Řád z chaosu, Mladá fronta 2001

[3] Július Krempaský a kolektív, *Synergetika*, Svornost, Bratislava 1987

[4] František Slanina, *Zákeřné dopravní zácpy*, Vesmír 76, 1997

[5] E. H. Lieb, J. Yngvason, *The Physics and Mathematics of The Second Law of Thermodynamics*, Physics Reports 310, 1999, 1-96

[6] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatics*, Wiley, New York, 1995

A. Použité algoritmy

A.1. Synergetika

A.1.1. Brusselator

Algorithm 1 brusselator.m

```
[t,x] = ode45('brusselator_model',[0 100],[1 1]);
figure(1);
plot(t,x);
title('Brusselator (A=1, B=3, k1..k4=1)');
xlabel('t - cas');
ylabel('[X],[Y] - koncentrace');
grid on;
figure(2);
plot(x(:,1),x(:,2));
title('Brusselator (A=1, B=3, k1..k4=1)');
xlabel('[X] - koncentrace');
ylabel('[Y] - koncentrace');
grid on;
```

Algorithm 2 brusselator_model.m

```
function dx = brusselator_model(t,x);
dx = zeros(2,1);
A = 1;
B = 3;
k1 = 1;
k2 = 1;
k3 = 0.1;
k4 = 1;
dx(1) = k1*A - k2*B*x(1) + k3*x(1)^2*x(2) - k4*x(1);
dx(2) = k2*B*x(1) - k3*x(1)^2*x(2);
```

A.1.2. Roesslerův oscilátor

Algorithm 3 roessler.m

```
[t,x] = ode45('roessler_model',[0 500],[1 0 0]);
figure(1);
plot(t,x);
title('Roessleruv oscilator - PP x=1, y=0, z=0');
xlabel('t - cas');
ylabel('x,y,z');
grid on;
figure(2); plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3));
title('Roessleruv oscilator - PP x=1, y=0, z=0');
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
grid on;
figure(3);
plot(t,x(:,3));
title('Roessleruv oscilator - PP x=1, y=0, z=0');
xlabel('t - cas');
ylabel('z');
grid on;
```

Algorithm 4 roessler_model.m

```
function dx = roessler_model(t,x);
dx = zeros(3,1);
a = 0.2;
b = 0.2;
c = 8;
dx(1) = -x(2) - x(3); dx(2) = x(1) + a*x(2);
dx(3) = b + x(1)*x(3) - c*x(3);
```

A.1.3. Antagonistický systém

Algorithm 5 dualsystem.m

```
[t,x] = ode45('dualsystem_model',[0 10],[1.5 1]);
figure(1);
plot(t,x);
title('Antagonisticky system (a1=2, a2=1, b=1)');
xlabel('t - cas');
ylabel('x,y - antagonisticke veliciny');
grid on;
figure(2);
plot(x(:,1),x(:,2));
title('Antagonisticky system (a1=2, a2=1, b=1)');
xlabel('x');
ylabel('y');
```

Algorithm 6 dualsystem_model.m

```
function dx = dualsystem_model(t,x);
dx = zeros(2,1);
a1 = 2;
a2 = 1;
b = 1;
dx(1) = a1*x(1) - b*x(1)*x(2);
dx(2) = -a2*x(2) + b*x(1)*x(2);
```

A.1.4. Systém dravec - kořist

Algorithm 7 draveckorist.m

```
[t,x] = ode45('draveckorist_model',[0 50],[1 1]);
figure(1);
plot(t,x);
title('System dravec-korist (a1=1, a2=1, b=2.3, c=0.1, r=8)');
xlabel('t - cas');
ylabel('x - korist, y - dravec (populace)');
grid on;
figure(2);
plot(x(:,1),x(:,2));
title('System dravec-korist (a1=1, a2=1, b=2.3, c=0.1, r=8)');
xlabel('x - korist');
ylabel('y - dravec');
grid on;
```

Algorithm 8 draveckorist_model.m

```
function dx = draveckorist_model(t,x);
dx = zeros(2,1);
a1 = 1;
a2 = 1;
b = 2.3;
c = 0.1;
r = 8;
dx(1) = a1*x(1) - b*x(1)*x(2)/(r+x(1)) - c*x(1)^2;
dx(2) = -a2*x(2) + b*x(1)*x(2)/(r+x(1));
```

A.2. Koncept potřeb

A.2.1. Model společenství s jednou potřebou

A.2.1.1. jedinci_1D_model.m

```
% jedinci 1D

clear;
n = 100; % pocet jedincu
m = 200; % velikost sveta
ru = 3; % radius uspokojeni
ra = 10; % akcni radius - za nimz uz neni zadne pusobeni
nu = 20; % pocet jedincu v okoli ru pro uspokojeni
ff = 25; % maximalni fluktuacni faktor - fluktuace
ms = 3; % maximalni mozny krok
tmax = 1000; % celkovy pocet kroku

x_axis = [1:m];

% pocatecni rozlozeni:
X = zeros(m,1);
% vektor indexu udavajici polohu jedincu
jedinec = unidrnd(m,n,1); % rovnomerne rozdeleni
%jedinec = round(m/2)*ones(n,1); % diracovo rozdeleni

X3D=zeros(m,1);
XP3D=zeros(m,1);
XU3D=zeros(m,1);

for i=1:n,
   X(jedinec(i))=X(jedinec(i))+1;
end;

for t=1:tmax,

% matice uspokojeni
MPr = zeros(m,1); % pocet smerem vpravo
MPl = zeros(m,1); % pocet smerem vlevo
for i=1:ra,
   xl = [m-i+1:m 1:m-i]; % pocet smerem _vpravo_
```

```
   xr = [1+i:m 1:i]; % pocet smerem _vlevo_
   MPr = MPr + X(xr);
   MPl = MPl + X(xl);
   if i == ru,
      MU = X + MPr + MPl;
      % pocet jedincu v uspokojujicim dosahu
   end;
end;

% vysledna matice pusobeni (potencial v poli)
% "-1" pohyb vlevo, "1" pohyb vpravo, "0" nic
MP = X + MPr + MPl; % pocet jedincu v rozsahu vnimani
MPs = sign(MPr-MPl); % udava smer pohybu v ramci potreby

% vektor zmeny polohy jednotlivych jedincu:

i = [1:n];
potreba = (MU(jedinec) < (nu+1)) & (MP(jedinec) > 1);
% boolean vektor existence potreby
% pocet mensi nez uspokojujici
% a zaroven dalsi jedinec v dosahu)
% 1 je zde protoze jedinec nebude pocitat sam sebe

faktor = unidrnd(ms,n,1);
% ruzna rychlost ve smeru potreby

d_jedinec(i) = faktor(i).*MPs(jedinec(i));
fluktuace = (unidrnd(2,n,1) - unidrnd(2,n,1))
   + not(potreba).*(unidrnd(ff,n,1) - unidrnd(ff,n,1));
% zcela nahodna fluktuace pro pripad, kdy je jedinec
% spokojen, ci spokojen vubec byt nemuze (neni v dosahu
% jedinec jiny), prvni clen u fluktuace je pridan jen
% pro pripad, aby minimalni fluktuace byla i v pripade,
% ze jedinec je rizen potrebou, vyhneme se tak
% stacionarnim stavum v reseni

jedinec = jedinec + (potreba.*d_jedinec') + fluktuace;
% novy vektor poloh mravencu

% nutno jeste doopravit prekrocene meze:
for i=1:n;
   if jedinec(i) > m,
      jedinec(i) = jedinec(i) - m;
```

```
   end
   if jedinec(i) < 1,
      jedinec(i) = m + jedinec(i);
   end
end

% nove rozlozeni pro X:
X = zeros(m,1);
for i=1:n,
   X(jedinec(i))=X(jedinec(i))+1;
end;

%figure(1);
%plot(x_axis,X);
%axis([0 m 0 10]);
%figure(2);
%plot(x_axis,MP);
%pause(0.05);
%drawnow;

X3D(:,t) = X(:);
XP3D(:,t) = MP(:);
XU3D(:,t) = MU(:);

if t==1,
   X1=X;
end;

end;

figure('Position',[50 50 1024 768]);

subplot('Position',[0.03 0.55 0.45 0.40]);
mesh(X3D);
axis([0 tmax 1 m 0 10]);
%axis off;
title('Rozlozeni jedincu v prostoru a case',
   'FontSize',14);
view(0,90);
caxis([0 nu/2]);

subplot('Position',[0.53 0.55 0.45 0.40]);
mesh(XP3D);
```

```
%axis off;
title('Pocet jedincu v oblasti pusobeni',
   'FontSize', 14);
view(0,90);
caxis([0 2*nu]);

subplot('Position',[0.03 0.05 0.45 0.40]);
mesh(XU3D);
title('Pocet jedincu v oblasti uspokojeni',
   'FontSize', 14);
%axis off;
view(0,90);
caxis([0 nu]);

subplot('Position',[0.53 0.3 0.45 0.15]);
plot(x_axis,X1);
axis([0 m 0 10]);
title('Vyskyt jedincu v prostoru po prvnim kroku',
   'FontSize',14);

subplot('Position',[0.53 0.05 0.45 0.15]); plot(x_axis,X);
axis([0 m 0 10]);
title('Konecny vyskyt jedincu v prostoru',
   'FontSize', 14);
```